

УДК 532.526.2

АНАЛІТИЧНА МОДЕЛЬ ДИНАМІЧНОГО ПОГРАНИЧНОГО ШАРУ НА ПОВЕРХНІ ЗА ЛАМІНАРНОГО РЕЖИМУ ОБТІКАННЯ

В. Т. Дмитрів, М. М. Микийчук, Т. В. Дмитрів

Національний університет «Львівська політехніка», Україна.

Стаття з спеціальності: 133 – галузеве машинобудування.

Кореспонденція авторів: Dmytriv_V@ukr.net.

*Історія статті: отримано – квітень 2021, акцептовано – серпень 2021, опубліковано – 30 вересня 2021 року.
Бібл. 15, рис. 3, табл. 0.*

Анотація. Для вирішення задач проектування систем, що працюють в Ньютонівських середовищах в режимі обтікання поверхонь, необхідно знати характеристики руху середовищ на поверхнях обтікання. Це дозволить розрахувати втрати енергії на транспортування середовищ та силові характеристик переміщення об'єктів таких середовищах.

В роботі наведено аналітичну модель дотичних напружень, які створюються на поверхнях обтікання в динамічному ламінарному пограничному шарі. Середовище обтікання прийнято Ньютонівським. Для універсальності результатів моделювання швидкості по товщині ламінарного пограничного шару і дотичних напружень на поверхні обтікання, проведено у відносних параметрах. Співвідношення товщини пограничного шару y/δ взято в межах $\approx 0...1$, відношення швидкостей на межі і в пограничному шарі $- v_x/v_0 = 0...1$, число Маха за умови ламінарного пограничного шару $- 0,0001...0,1$.

Отримано розподіл швидкості по товщині пограничного шару і дотичні напруження. Характер зміни дотичних напружень по товщині пограничного шару від ≈ 0 до $20 \cdot 10^{-21}$ є лінійним і залежить від числа Маха. Змінюються дотичні напруження безпосередньо на поверхні обтікання від $704,4 \text{ ЕПа}$ до $704,4 \text{ ППа}$ за чисел Маха від $0,1$ до $0,0001$.

Розроблені аналітичні залежності швидкості і дотичних напружень дозволяють моделювати динамічні характеристики по товщині ламінарного пограничного шару на поверхні обтікання для Ньютонівських середовищ.

Ключові слова: пограничний шар, ламінарний потік, дотичні напруження, число Маха, швидкість, динамічна в'язкість.

Постановка проблеми

В задачах реалізації адаптивних систем керування виникає проблема аналітичної ідентифікації параметрів процесу. Такі систем характеризуються процесами, на параметри яких одночасно впливають декілька факторів, що характеризують технологічний процес. Обтікання поверхні ньютонівським

середовищем із швидкістю, змінною в часі, на поверхні обтікання утворюється динамічний пограничний шар. В межах цього динамічного пограничного шару швидкість потоку змінюється від нуля на поверхні тіла обтікання до швидкості невимушеного потоку. В роботі розглянуто вплив параметрів транспортування ньютонівських середовищ і їх характеристик на динамічні параметри пограничного шару за ламінарного режимів руху. Для динамічної характеристики і якісних параметрів процесу (передачі енергії, теплопровідності і ін.) необхідно знати характеристику дотичних напружень у пограничному шарі, його товщину і інших динамічних параметрів.

Дослідження характеристик пограничного шару на поверхнях обтікання, які підпорядковуються законам Ньютона (Ньютонівські середовища) є актуальним завданням для різних сфер приладобудування та задач прикладної механіки. Критерієм оцінки є дотичні напруження і розподіл швидкості в пограничному шарі, що безпосередньо впливає на втрати енергії (втрати тиску) при руху об'єкту в середовищі.

Аналіз останніх досліджень

Швидкість у пограничному шарі і його товщина впливають на дотичні напруження, які виникають у процесі потоку середовища, та коефіцієнт тертя, який характеризує втрати тиску. Квазістаціонарне напруження зсуву у пограничному шарі біля стінки визначають шляхом обчислення коефіцієнта тертя при миттєвому числі Рейнольдса [1]. Дотичні напруження зсуву залежать від товщини пограничного шару, а також від характеру руху, що не є однозначним за турбулентного і пульсуючого (вимушена турбулентність) режимів руху [2].

Часто досліджуючи втрати тиску використовують для розрахунків емпіричні залежності коефіцієнтів тертя, що не завжди відповідають фізиці процесу транспортування середовища і не характеризують пограничний шар та напруження, які безпосередньо впливають на втрати тиску [3].

Ряд дослідників уточнюють емпіричні рівняння, отримані експериментально для конкретних інтервалів чисел Рейнольдса [4-7], або існуючі залежності коефіцієнтів тертя для рідин - використовують для газів і для двофазних потоків [8], що спотворює точність розрахункових даних. В цих рівняннях відсутні параметри пограничного шару і дотичні напруження, які виникають між шарами.

За результатами експериментів розраховують емпіричні рівняння для визначення коефіцієнтів тертя на інтервалі всього ряду числа Рейнольдса [9], або проводять апроксимацію експериментальних даних для отримання емпіричного рівняння визначення коефіцієнтів тертя, особливо для двофазних потоків (рідина і газ) [10; 11]. Апроксимовані емпіричні залежності коефіцієнту тертя при використанні для чисел Рейнольдса, відмінних від експерименту, дають значну похибку у розрахунках, яка досягає до 10 %. А при переході з рідинних потоків на газові, використання таких емпіричних залежностей неприпустимо із-за зміни фізики процесу. Тоді оцінка параметрів пограничного шару за мінімальної похибки їх значень не відповідає реальному процесу.

Найбільш розповсюдженим методом дослідження параметрів пограничного шару є числовий метод дослідження на основі рівнянь Нав'є-Стокса [12; 13]. Дані рішення рівнянь мають також наближений результат із-за обмеження початкових умов, які як правило застосовуються для турбулентного надзвукового режиму руху середовища.

Розгляд проблеми динамічного аналізу пограничного шару на поверхні обтікання показав, що розв'язок аналітичної моделі дотичних напружень на поверхнях обтікання не розглянуто за ламінарного руху Ньютонівських середовищ.

Мета досліджень

Метою досліджень є аналітичне моделювання дотичних напружень на поверхні обтікання Ньютонівським середовищем за динамічного ламінарного пограничного шару.

Результати досліджень

Промодельовано пограничний шар за ламінарного й турбулентного режимів руху ньютонівської рідини у гнучкому трубопроводі, де визначено швидкість в товщину пограничного шару [14].

Для забезпечення оптимального режиму руху об'єкту, що обтікається середовищем необхідно визначити дотичні напруження на поверхні обтікання динамічним пограничним шаром.

Розглянемо поверхню обтікання у вигляді площини твердого покриття, непроникої (рис. 1). Швидкість потоку v_0 є сталою на інтервалі часу t . На самій поверхні пластини швидкість потоку рівна «нулю»: $v_0 = 0$ за $y = 0$. Товщину пограничного шару умовно позначимо δ . Вісь X паралельна поверхні і співнапрямлена з напрямком вектора обтікання поверхні середовищем. Вісь Y перпендикулярна до

поверхні обтікання. В пограничному шарі буде справедлива умова [15]:

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} \neq 0 \text{ за } y < \delta,$$

і зовнішній потік, де:

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = 0, v_x = v_0 \text{ поза шаром } y \geq \delta.$$

В пограничному шарі сили, які виникають із-за в'язкості середовища обтікання і сили інерції є співрозмірними.

Розглянемо рух середовища на поверхні обтікання тільки в одному напрямку ординати X . Рівняння руху середовища обтікання і нерозривності потоку будуть мати вигляд [15]:

$$v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (2)$$

Рівняння дотичних напружень має вигляд [15]:

$$\tau_{\text{тер}} = \mu \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y}. \quad (3)$$

Диференціюємо рівняння (3), попередньо поділивши його на ρ :

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \tau_{\text{тер}}}{\partial y} = \frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}. \quad (4)$$

Підставимо отриману залежність (4) в рівняння (1):

$$v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \tau_{\text{тер}}}{\partial y}, \quad (5)$$

і інтегруємо рівняння (5) в межах від $y = 0$ до $y = \delta$, позначивши умовно праву частину рівняння (5), як:

$$I_{\text{ІНТ}} = I_1 + I_2 = -\frac{1}{\rho} \cdot \int_0^{\delta} \frac{\partial p}{\partial x} dy + \frac{1}{\rho} \cdot \int_0^{\delta} d\tau_{\text{тер}}. \quad (6)$$

Інтегруємо перший член рівняння (6):

$$I_1 = -\frac{1}{\rho} \cdot \int_0^{\delta} \frac{\partial p}{\partial x} dy = -\frac{1}{\rho} \left[\left(y \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \right) \Big|_0^{\delta} - \int_0^{\delta} y \cdot \frac{d^2 p}{dx^2} \right] \approx 0.$$

Аналіз результату інтегрування I_1 показує, що градієнт тиску на поверхні обтікання наближається до «нуля».

Другий член залежності (6) інтегруємо так:

$$I_2 = \frac{1}{\rho} \cdot \int_0^{\delta} d\tau_{\text{тер}} = \frac{1}{\rho} \cdot (\tau_{\text{тер}}|_{y=\delta} - \tau_{\text{тер}}|_{y=0}) \approx -\frac{1}{\rho} \cdot \tau_{\text{тер.С}}, \quad (7)$$

де $\tau_{\text{тер.С}}$ – дотичне напруження на поверхні обтікання за умови $y = 0$.

З рівняння нерозривності потоку (2) визначаємо v_y :

$$v_y = -\int_0^y \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot dy. \quad (8)$$

Підставимо вираз (8) у рівняння (5) в його ліву частину:

$$I_{\text{ІНТ}} = \int_0^{\delta} v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot dy - \int_0^{\delta} \left(\int_0^y \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot dy \right) \cdot dv_x. \quad (9)$$

Для зручності, берем інтеграл з виразу (9) – крайній правий:

$$\int_0^\delta \left(\int_0^y \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot dy \right) \cdot dv_x = v_x \cdot \int_0^y \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot dy \Big|_0^\delta - \int_0^\delta v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot dy = v_0 \cdot \int_0^\delta \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot dy - \int_0^\delta v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot dy = \int_0^\delta (v_0 - v_x) \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot dy. \quad (10)$$

Результат інтегрування (10) підставимо у вираз (9), отримаємо:

$$I_{\text{INT}} = \int_0^\delta v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot dy - \int_0^\delta (v_0 - v_x) \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot dy = - \int_0^\delta \frac{\partial}{\partial x} \cdot (v_x \cdot (v_0 - v_x)) \cdot dy = - \frac{\partial}{\partial x} \cdot \int_0^\delta (v_x \cdot (v_0 - v_x)) \cdot dy. \quad (11)$$

Враховуючи залежності (11) і (7), рівняння (5) буде:

$$\rho \cdot \frac{\partial}{\partial x} \cdot \int_0^\delta (v_x \cdot (v_0 - v_x)) \cdot dy = \tau_{\text{тер.с}}, \quad (12)$$

де v_0 – швидкість на межі пограничного шару, за умови $y = 0$.

Для розв'язку рівняння (12) задаємо функцію розподілу швидкості у пограничному шарі на площині обтікання. Вважаємо, що швидкість, за ламінарного режиму руху обтікання площинної поверхні, в пограничному шарі змінюється по траєкторії (рис. 1), яку можна описати кубічним рівнянням.

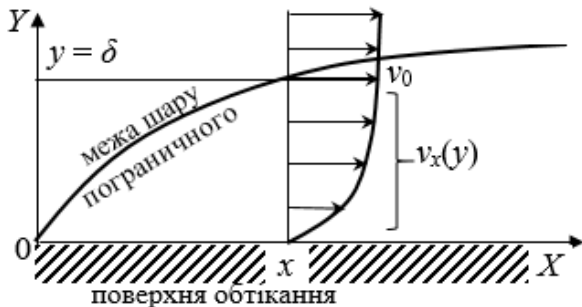


Рис. 1. Розподіл швидкостей на поверхні обтікання за ламінарного пограничного шару.

Fig. 1. Distribution of velocities on the streamlined surface at the laminar boundary layer.

Тоді:

$$v_x = a + b \cdot y + c \cdot y^2 + m \cdot y^3. \quad (13)$$

Коефіцієнти a , b , c , m визначаємо із граничних умов:

1) на поверхні площини обтікання: $y = 0$, $v_x = 0$, підставляємо у рівняння (13), отримуємо, що $a = 0$;

2) за $y = 0$, $v_x = 0$, $v_y = 0$, відповідно $\partial^2 v_x / \partial y^2 = 0$;

Диференціюємо два рази рівняння (13):

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = b + 2c \cdot y + 3m \cdot y^2;$$

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 2c + 6m \cdot y = 0, \Rightarrow c = 0.$$

Тоді з рівняння (13) отримаємо за $a = 0$ і $c = 0$:

$$v_x = b \cdot y + m \cdot y^3. \quad (14)$$

Врахуємо початкові умови:

1) $y = 0$, $v_x = 0$, $\partial v_x / \partial y = 0$;

$$b + 3m \cdot y^2 = 0, b = -3m \cdot y^2;$$

2) $y = \delta$, $v_x = v_0$:

$$v_0 = -3m \cdot \delta^3 + m \cdot \delta^3, b = \frac{3}{2} \cdot \frac{v_0}{\delta}.$$

Враховуючи рівняння (14), характер зміни швидкості в ламінарному пограничному шарі по його висоті на поверхні обтікання описується рівнянням:

$$v_x = v_0 \cdot \frac{3\delta^2 \cdot y - y^3}{2\delta^3};$$

або

$$v_0 = v_x \cdot \frac{2\delta^3}{3\delta^2 \cdot y - y^3}. \quad (15)$$

Враховуємо рівняння (15) в залежності (12):

$$\rho \cdot \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta \left(v_x \left(v_x \cdot \frac{2\delta^3}{3\delta^2 \cdot y - y^3} - v_x \right) \right) dy = \tau_{\text{тер.с}}$$

або

$$\rho \cdot \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta \left(v_x^2 \cdot \frac{2\delta^3}{3\delta^2 \cdot y - y^3} - v_x^2 \right) dy = \tau_{\text{тер.с}}. \quad (16)$$

Інтегруємо рівняння (16), отримаємо:

$$\rho \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(v_x^2 \left(\frac{1}{3} \ln \frac{3\delta^2 - y^2}{y^2} + y \right) \right) = \tau_{\text{тер.с}} + C_1. \quad (17)$$

$$\rho \int_{v_x(y)}^{v_0(\delta)} \partial \left(v_x^2 \left(\frac{1}{3} \ln \frac{3\delta^2 - y^2}{y^2} + y \right) \right) = \int_0^x (\tau_{\text{тер.с}} + C_1) dx. \quad (17)$$

Враховуючи початкові умови $y = \delta$, $v_x = v_0$, після інтегрування рівняння (17), отримаємо: $C_1 = -\tau_{\text{тер.с}}$. Відповідно після інтегрування рівняння (17) отримаємо залежність для моделювання швидкості ламінарного пограничного шару за умови, що градієнт тиску на поверхні обтікання наближається до «нуля»:

$$v_x = v_0 \cdot \sqrt{\frac{1,231 \cdot \delta}{y + \frac{1}{3} \cdot \delta \cdot \ln \frac{3\delta^2 - y^2}{y^2}}}. \quad (18)$$

Для розроблення аналітичної моделі дотичного напруження на в ламінарному пограничному шарі на поверхні обтікання візьмем диференціал першого порядку виразу (18):

$$\frac{dv_x}{dy} = \frac{1,231}{\delta} \cdot \frac{v_0^2}{v_x} \cdot \frac{\delta \cdot \left(\frac{y}{3\delta^2 - y^2} + \frac{1}{y} \right) - 1}{\left(\frac{y}{\delta} + \frac{1}{3} \cdot \ln \frac{3\delta^2 - y^2}{y^2} \right)^2}. \quad (19)$$

Враховуючи рівняння (19) і (3), дотичні напруження будуть визначатись залежністю:

$$\tau_{\text{тер}} = \mu \cdot \frac{1,231}{\delta} \cdot \frac{v_0^2}{v_x} \cdot \frac{\delta \cdot \left(\frac{y}{3\delta^2 - y^2} + \frac{1}{y} \right) - 1}{\left(\frac{y}{\delta} + \frac{1}{3} \cdot \ln \frac{3\delta^2 - y^2}{y^2} \right)^2}, \quad (20)$$

де $\tau_{\text{тер}}$ – дотичні напруження на поверхні обтікання в

ламінальному пограничному шарі, H/m^2 ; μ – динамічна в'язкість середовища обтікання, $H\cdot c/m^2$; v_0 – швидкість потоку середовища обтікання на зовнішній межі пограничного шару, m/c ; v_x – швидкість середовища обтікання по висоті пограничного шару (19), m/c ; δ – товщина пограничного шару, m ; y – координата товщини пограничного шару, m .

Проведено моделювання швидкості по висоті ламінарного пограничного шару і дотичних напружень на поверхні обтікання у відносних параметрах. Для врахування співвідношення товщини пограничного шару і координати y приймемо відношення y/δ в межах $y/\delta \approx 0 \dots 1$, відношення швидкостей на межі і по товщині пограничного шару – $v_x/v_0 = 0 \dots 1$, число Маха за умови ламінарного пограничного шару – $M = 0,0001 \dots 0,1$. За результатами моделювання побудовано графічні залежності (рис. 2 і рис. 3).

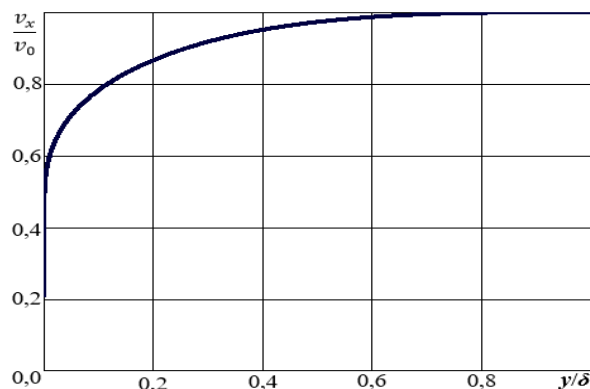


Рис. 2. Графік відносної швидкості потоку повітря в ламінальному пограничному шарі на площинній поверхні обтікання.

Fig. 2. Graph of the relative velocity of airflow in the laminar boundary layer on the planar streamlined surface.

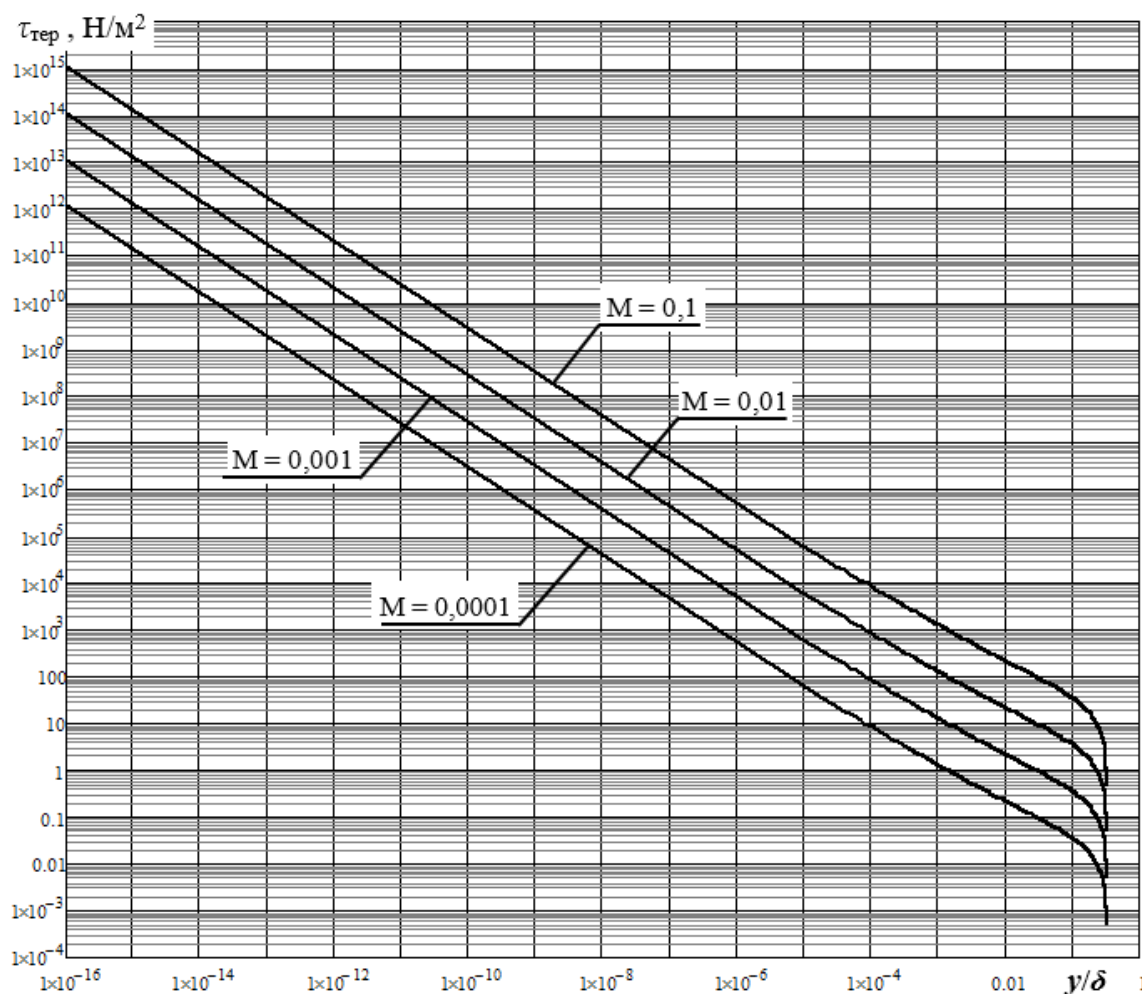


Рис. 3. Графік дотичних змін напружень по товщині ламінарного пограничного шару на площинній поверхні обтікання за чисел Маха M .

Fig. 3. Graph of tangential stress changes over the thickness of the laminar boundary layer on the planar streamlined surface around Mach numbers M .

Моделювання проводили для повітря за стандартних умов: тиск на поверхні обтікання $P = 100 \text{ кПа}$, температура повітря 20°C , густина повітря $\rho = 1,29 \text{ кг/м}^3$; динамічні в'язкості повітря $\mu = 18,6 \text{ мкПа}\cdot\text{с}$. Поверхня обтікання є площинною, градієнт тиску на поверхні обтікання приймали рівним «нулю». Аналіз результатів моделювання показує, що

на віддалі від поверхні обтікання в межах до 20 зм швидкість повітря є на межі ≈ 0 . Дотичні напруження (рис.3) на віддалі 10...20 зм від поверхні обтікання становлять від 704,4 ГПа ... 704,4 ЕПа за чисел Маха $M = 0,0001 \dots 0,1$ до 124,2 ГПа...14,22 ТПа. Після товщини пограничного шару 21 зм дотичні напруження знижуються не лінійно (рис. 3) і на віддалі

0,3475· δ наближаються до «нуля».

Графічно подані залежності дотичних напружень (рис. 3) показують, що із зміною числа Маха, характер зміни дотичних напружень ідентичний, із збільшенням числа Маха дотичні напруження зростають.

Висновки

1. Розроблені аналітичні залежності для теоретичного дослідження розподілу швидкості і дотичних напружень на поверхні обтікання за динамічного ламінарного пограничного шару уможливають з високою дискретністю визначити параметри процесу обтікання поверхні Ньютонавським середовищем.

2. Моделювання можна проводити як у фізичних параметрах так і за відносних одиниць. Аналітична залежність дотичних напружень уможливає визначення фізичного значення параметру.

3. Дані моделі дозволяють отримати результати у всьому діапазоні зміни вхідних величин моделі за умови ламінарного режиму руху середовища на поверхні обтікання.

Список літератури

1. He S., Ariyaratne C. Wall shear stress in the early stage of unsteady turbulent pipe flow. *Journal of Hydraulic Engineering*. 2011. Vol. 137(5). P. 606-610.
2. Sundstrom L.R.J., Cervantes M.J. On the Similarity of Pulsating and Accelerating Turbulent Pipe Flows. *Flow, Turbulence and Combustion*. 2018. Vol. 100(2). P. 417-436. <https://doi.org/10.1007/s10494-017-9855-5>
3. Kong R., Kim S. Characterization of Horizontal Air-water Two-Phase Flow. *The 16th International Topical Meeting on Nuclear Reactor Thermal Hydraulics (NURETH-16)*. 2015, August - September. P. 5559-5572. Chicago/USA.
4. Offor U. H., Alabi S. B. An Accurate and Computationally Efficient Explicit Friction Factor Model. *Advances in Chemical Engineering and Science*. 2016. Vol. 6. P. 237- 245. <http://dx.doi.org/10.4236/aces.2016.63024>.
5. Medina Y. C., Fonticiella O.M.C., Morales O.F.G. Design and modelation of piping systems by means of use friction factor in the transition turbulent zone. *Mathematical Modelling of Engineering Problems*. 2017. Vol. 4(4). P. 162-167. doi: 10.18280/mmep.040404.
6. Azizi N., Homayoon R., Hojjati M. R. Predicting the Colebrook-White friction factor in the pipe flow by new explicit correlations. *Journal of Fluids Engineering*, 2018. Vol. 141(5). doi:10.1115/1.4041232.
7. Pimenta B. D., Robaina A. D., Peiter M. X., Mezzomo W., Kirchner J. H., Ben, L. H. B. Performance of explicit approximations of the coefficient of head loss for pressurized conduits. *Brazilian Journal of Agricultural and Environmental Engineering (Revista Brasileira de Engenharia Agrícola et Ambiental)*. 2018. Vol. 22 (5). P. 301-307. Retrieved from <http://www.agriambi.com.br>.
8. Ganat T. A., Hrairi M. Gas-Liquid Two-Phase Upward Flow through a Vertical Pipe. Influence of

Pressure Drop on the Measurement of Fluid Flow Rate, *Energies (MDPI)*. 2018. Vol. 11(11). P. 1-23. doi:10.3390/en11112937.

9. Brkic D., Praks P. Unified Friction Formulation from Laminar to Fully Rough Turbulent Flow. *Applied Sciences*. 2018. Vol. 8(11). P. 20-36. doi: 10.3390/app8112036.

10. Ortiz-Vidal L. E., Mureithi N., Rodriguez O. M. H. Friction Factor in Two-Phase Gas-Liquid Pipe Flow. 8-th International Conference on Multiphase Flow (ICMF-2013). 2013, May. Jeju. Korea. Retrieved from <https://www.researchgate.net/publication/237079232>.

11. Lukman S., Oke I. A. Accurate Solutions of Colebrook-White's Friction Factor Formulae. *Nigerian Journal of Technology (NIJOTECH)*. 2017. Vol. 36(4). P. 1039-1048. Nigeria.

12. Косторной С. Д. Модель течения, учитывающая особенности граничных условий реальной жидкости. *Вісник НТУ «ХП»*. 2014. № 1(1044). С. 214-221.

13. Приходько А. А., Полевой О. Б. Управление отрывом турбулентного сверхзвукового потока с помощью тепло- и массообмена. *Промышленная теплотехника*. 2007. Т. 29. С. 15-20.

14. Дмитрів В. Т., Стоцько З. А., Дмитрів І. В. Моделювання пограничного шару за ламінарного й турбулентного режимів руху ньютонівської рідини у гнучкому трубопроводі. *Технологічні комплекси*. 2019. № 1(16). С. 73-84.

15. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. Москва. Наука. 1988. 735 с.

References

1. He S., Ariyaratne C. (2011). Wall shear stress in the early stage of unsteady turbulent pipe flow. *Journal of Hydraulic Engineering*. 137(5). 606-610.
2. Sundstrom L.R.J., Cervantes M.J. (2018). On the Similarity of Pulsating and Accelerating Turbulent Pipe Flows. *Flow, Turbulence and Combustion*. 100(2). 417-436. <https://doi.org/10.1007/s10494-017-9855-5>.
3. Kong R., Kim S. (2015, August – September). Characterization of Horizontal Air-water Two-Phase Flow. *The 16th International Topical Meeting on Nuclear Reactor Thermal Hydraulics (NURETH-16)*. 5559-5572. Chicago/USA.
4. Offor U. H., Alabi S. B. (2016). An Accurate and Computationally Efficient Explicit Friction Factor Model. *Advances in Chemical Engineering and Science*. 6. 237- 245. <http://dx.doi.org/10.4236/aces.2016.63024>.
5. Medina Y. C., Fonticiella O.M.C., Morales O.F.G. (2017). Design and modelation of piping systems by means of use friction factor in the transition turbulent zone. *Mathematical Modelling of Engineering Problems*. 4(4). 162-167. doi: 10.18280/mmep.040404.
6. Azizi N., Homayoon R., Hojjati M. R. (2018). Predicting the Colebrook-White friction factor in the pipe flow by new explicit correlations. *Journal of Fluids Engineering*, 141(5). doi:10.1115/1.4041232.
7. Pimenta B. D., Robaina A. D., Peiter M. X., Mezzomo W., Kirchner J. H., Ben, L. H. B. (2018).

Performance of explicit approximations of the coefficient of head loss for pressurized conduits. *Brazilian Journal of Agricultural and Environmental Engineering (Revista Brasileira de Engenharia Agrícola et Ambiental)*. 22(5). 301-307. Retrieved from <http://www.agriambi.com.br>.

8. Ganat T. A., Hrairi M. (2018). Gas-Liquid Two-Phase Upward Flow through a Vertical Pipe. Influence of Pressure Drop on the Measurement of Fluid Flow Rate, *Energies (MDPI)*. 11(11). 1-23. doi:10.3390/en11112937.

9. Brkic D., Praks P. (2018). Unified Friction Formulation from Laminar to Fully Rough Turbulent Flow. *Applied Sciences*. 8(11). 20-36. doi: 10.3390/app8112036.

10. Ortiz-Vidal L. E., Mureithi N., Rodriguez O. M. H. (2013, May). Friction Factor in Two-Phase Gas-Liquid Pipe Flow. 8-th International Conference on Multiphase Flow (ICMF-2013). Jeju / Korea. Retrieved from <https://www.researchgate.net/publication/237079232>.

11. Lukman S., Oke I. A. (2017). Accurate Solutions of Colebrook-White's Friction Factor Formulae. *Nigerian Journal of Technology (NIJOTECH)*. 36(4). 1039-1048. Nigeria.

12. Kostornoi S. D. (2014). Flow model, taking into account the boundary conditions of the real fluid. *Bulletin of NTU "KhPI"*. 1(1044). 214-221.

13. Prihodko A. A., Polevoy O. B. (2007). Control of separation of turbulent supersonic flow by means of heat and mass transfer. *Industrial heat engineering*. 29. 15-20.

14. Dmytriv V. T., Stotsko Z. A., Dmytriv I. V. (2019). Modeling of the boundary layer under laminar and turbulent modes of Newtonian fluid motion in a flexible pipeline. *Technological complexes*. 1(16). 73-84.

15. Landau L. D., Lifshitz E. M. (1988). *Theoretical physics. Hydrodynamics*. Moscow. Nauka. 735.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИЧЕСКОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ПОВЕРХНОСТИ ПРИ ЛАМИНАРНОМ РЕЖИМЕ ОБТЕКАНИИ

Т. В. Дмитрів, Н. Н. Микийчук, В. Т. Дмитрів

Аннотация. Для решения задач проектирования систем, которые работают в Ньютоновской среде в режиме обтекания поверхностей, необходимо знать характеристики потока сред на поверхностях обтекания. Это позволит рассчитать потери энергии на транспортирования сред, а также силовые характеристики перемещения объектов в таких средах.

В работу наведено аналитическую модель касательных напряжений, которые создаются на поверхностях обтекания в динамическом ламинарном пограничном слое. Среда обтекания Ньютоновская. Для универсальности результатов моделирования скорости по толщине ламинарного пограничного слоя и касательных напряжений на поверхности обтекания проведено в относительных параметрах. Соотношение толщины пограничного слоя y/δ взято в пределах $\approx 0 \dots 1$, соотношение скоростей на границе и в пограничном слое $v_x/v_0 = 0 \dots 1$, число Маха при условии ламинарного пограничного слоя $0,0001 \dots 0,1$.

Получено распределение скорости по толщине пограничного слоя и касательных напряжений. Характер изменения касательных напряжений по толщине пограничного слоя от ≈ 0 до $20 \cdot 10^{-21}$ м

линейный и зависит от числа Маха. Изменяются касательные напряжения непосредственно на поверхности обтекания от 704,4 ЕПа до 704,4 ППа при числах Маха от 0,1 до 0,0001.

Разработанные аналитические зависимости скорости и касательных напряжений позволяют моделировать динамические характеристики по толщине ламинарного пограничного слоя на поверхности обтекания для Ньютоновских сред.

Ключевые слова: пограничный слой, ламинарный поток, касательные напряжения, число Маха, скорость, динамическая вязкость.

ANALYTICAL MODEL OF DYNAMIC BOUNDARY LAYER ON THE SURFACE UNDER LAMINAR FLOW MODE

T. V. Dmytriv, M. M. Mykyychuk, V. T. Dmytriv

Abstract. To solve the problems of designing systems that operate in Newtonian medium in the mode of streamlined surfaces, it is necessary to determine the characteristics of the motion of such medium on the streamlined surfaces. This will allow you to calculate the energy loss for the transportation of environments, as well as the power characteristics of the movement of objects in such environments.

The paper presents the development of an analytical model of tangential stresses that are created on streamlined surfaces in a dynamic laminar boundary layer. The flow environment is adopted by Newtonian. For the universality of results of modeling of speed over a height of a laminar boundary layer and tangential stresses on a streamlined surface, it is carried out in relative parameters. The ratio of the thickness of the boundary layer y/δ is taken within $\approx 0 \dots 1$, the ratio of velocities at the boundary and in the boundary layer is $v_x/v_0 = 0 \dots 1$, the Mach number under the condition of the laminar boundary layer is $0,0001 \dots 0,1$.

As a result of the simulation, the velocity distribution over the thickness of the boundary layer and tangential stresses are obtained. The nature of the change in tangential stresses along the thickness of the boundary layer from ≈ 0 to $20 \cdot 10^{-21}$ is linear and depends on the Mach number. The tangential stresses change directly on the streamlined surface from 704.4 ЕPa to 704.4 PPa at Mach numbers from $0,0001 \dots 0,1$.

Developed analytical dependences of velocity and tangential stresses allow modeling the dynamic characteristics over the height of the laminar boundary layer on the streamlined surface for Newtonian medium.

Key words: experimental research, change in departure, the combination of movements, loader crane, dynamic loads, load vibrations.

В. Т. Дмитрів ORCID: 0000-0001-9361-6418.

М. М. Микийчук ORCID: 0000-0002-0591-6304.

Т. В. Дмитрів ORCID: 0000-0002-4102-3685.