

17,8 billion cubic meters, and the demand – 33,2 billion cubic meters. To meet the needs of the national economy and consumption, the population needs to import 15.4 billion cubic meters of natural gas. The reserves of fossil coal in Ukraine in 2016 amounted to 34,375 billion tons, of which 90% are concentrated in the Donbas, each year 17,1 million tons of coal are extracted. At the same time, the coal deposits of the an-tracite group, which is used by 45% of the power units of the Ukrainian TPP, are located in a temporarily occupied Russian aggressor territory. Therefore, the situation arose that, with large coal reserves, Ukraine had to import energy coal. Due to the complex geological conditions of coal beds, most of the state-owned coal mines in Ukraine are unprofitable.

Key words: *fossil fuels, coal, oil, natural gas, fuel and energy resources*

УДК 622.6

ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНА МОДЕЛЬ РУХУ СТРІЧКОВОГО КОНВЕЄРУ

***І. М. Сівак, Ю. В. Човнюк, кандидати технічних наук
Національний університет біоресурсів і
природокористування України
e-mail: sivakim@ukr.net***

Анотація. *Наведена дискретно-континуальна модель руху стрічкового конвеєру. Хвилеутворення, які виникають у стрічці конвеєру, що транспортує вантаж, розглянуті з позиції динаміки системи з розподіленими параметрами. Використані методи математичної фізики та апарат Фур'є. Обґрунтована дискретно – континуальна модель руху стрічкового конвеєру, яка на відміну від роботи [8], дозволяє враховувати рух кінців стрічки, які з'єднані з приводом конвеєру. Таким чином, у даній моделі роботи стрічкового конвеєру сама стрічка є складовою складної механічної системи.*

Ключові слова: *дискретність, континуальність, модель, рух, стрічковий конвеєр*

Постановка проблеми. *Сучасний рівень розвитку технології видобутку та переробки корисних копалин обумовлює широке*

© І. М. Сівак, Ю. В. Човнюк, 2017

застосування у промисловості протяжних транспортних засобів, характерна особливість котрих полягає у тому, що один з розмірів суттєво перевищує інші. Це, зокрема, стрічкові конвеєри. Правило врахування динамічних процесів, які протікають у цих машинах, є одним з основних факторів, що визначають працездатність, надійність та економічність конструкції. Оскільки всебічний огляд цих процесів практично неможливий, для наближеного їх опису зазвичай використовується розрахункові моделі.

При розрахунковому моделюванні динамічних процесів у протяжних транспортних пристроях широко використовується моделі, основним елементом котрих є пружний прямолінійний стрижень. Зрозуміло, що такі моделі не можуть відображати всіх особливостей прототипу. Однак часто вони дозволяють виявляти найбільш суттєві сторони явища, уникати накладання ефектів різної фізичної природи. Зокрема, використання значних методів математичної фізики (методу Фур'є) щодо аналізу динаміки системи з дискретно-континуальними (тобто із зосередженими й розподіленими) параметрами, на думку авторів даної роботи дозволяє виявити вказані особливості функціонування стрічкових конвеєрів (поступове вмикання вантажонесучого органу у роботу при пуску конвеєру), а також неминучі хвиле утворення у самій стрічці конвеєра (поздовжні та поперечні).

Аналіз останніх досліджень. Одновимірним хвильовим рівнянням описуються фізичні процеси, що протікають у багатьох технічних пристроях та їх елементах. Класичними прикладами є поздовжні коливання прямолінійного пружного стрижня й малі поперечні коливання натягнутої струни.

Модель прямолінійного пружного стрижня, який знаходиться під впливом поздовжніх збурень, широко використовується у прикладних науках для вивчення роботи різноманітних фізичних об'єктів, наприклад, стрічкових та скребкових конвеєрів, вібраційних транспортуючих засобів [1–8]. Хвильове рівняння не відображає повністю роботу вказаних механізмів, проте часто дозволяє встановити вплив найбільш суттєвих факторів.

Процеси пуску й гальмування протяжних стрічкових та скребкових конвеєрів супроводжується поздовжніми коливаннями у вантажонесучому органі. У якості розрахункової моделі для вивчення побічних явищ використовується стрижень, який знаходиться під впливом поздовжніх деформацій та дії вісьової сили у кінцевому перерізі й розподіленого поздовжнього навантаження протилежного напрямку [7, 9].

Результати цитованих вище робіт будуть використані у даному дослідженні.

Мета досліджень полягає у обґрунтування дискретно-континуальної моделі руху стрічкового конвеєру.

Для досягнення мети роботи використані методи математичної фізики та апарат Фур'є, наведені у монографії [10].

Результати досліджень. Розглянемо пружний прямолінійний стрижень (модель стрічки) з площею перерізу S , на котрий діє розподілене поздовжнє навантаження $q_*(x, t)$, залежне від координати точки прикладання та часу. При розгляді розрахункової моделі конвеєра так моделюють дію сил опору, які створюють опір рухові вантажонесучого органу, а також розподілену по стрічці вагу матеріалу, що транспортується [8]. Деформація стрижня викликає у його поперечних перерізах поздовжні зусилля:

$$F_c = ES \times \frac{\partial n}{\partial x} \quad (1)$$

де: E – модуль пружності матеріалу стрічки, $n(x, t)$ – переміщення стрічки вздовж вісі OX , яке залежить від координати x та часу t . Складаючи рівняння, що відповідає умові рівноваги елементарної ділянки стрижня з урахуванням її сили інерції у відповідності з принципом Даламбера, матимемо:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(ES \times \frac{\partial n}{\partial x} \right) = \rho \times \frac{\partial^2 n}{\partial t^2} - q_*(x, t) \quad (2)$$

де: ρ – лінійна щільність стрижня, кг/м. У випадку постійного значення поперечного перерізу й модуля пружності можна рівняння (2) надати вигляду:

$$\frac{\partial^2 n}{\partial t^2} - a^2 \times \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = q(x, t) \quad (3)$$

де: q – умовне розподілення навантаження, м/с², $q = q_*/\rho$; a – швидкість розподілення навантаження у стрижні поздовжньої хвилі, $a = \sqrt{ES/\rho}$.

Хвильове рівняння (3) представляє собою диференціальну форму другого закону Ньютона й передбачає існування других похідних від переміщень. При розв'язуванні деяких задач переважає інтегральна форма запису рівняння руху стрижня, яка дозволяє відмовитись від вказаної вище вимоги (диференційованості функції $U(x, t)$). Ця форма є вираженням закону збереження кількості руху.

Для математичної визначеності задачі про рух стрижня, повинні бути задані граничні та почасткові умови. Граничні умови зазвичай виражають кінематичні чи статичні умови, які реалізуються на кінцях стрижня у початковий момент часу, тобто закон зміни переміщень та швидкостей частинах стрижня.

При дослідження поздовжніх пружних коливань стрижня фіксованої довжини найчастіше використовується два класичних методи розв'язку хвильового рівняння: розділення змінних і

розповсюджуваних хвиль. Усталені коливання, як правило, вивчаються на основі першого методу. Застосування методу розповсюджуваних хвиль можливе при дослідженні перехідних процесів, які породжуються локалізованими впливами.

Нижче для розв'язку хвильового рівняння застосовується метод Фур'є розділення змінних, поданий у [10].

Розглянемо вимушені коливання обмеженою за довжиною (l) стрижня під дією зовнішньої сили $q(x,t)$, розрахованої на одиницю його довжини. Вважають, що кінці його не закріплені, а рухаються за заданим законом. Ця задача зводиться до розв'язку рівняння (випливає з (3)):

$$\frac{\partial^2 n}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + q(x, t) \quad (4)$$

За граничних умов:

$$U|_{x=0} = \kappa_1(t), \quad U|_{x=l} = \kappa_2(t), \quad (5)$$

й початкових умовах:

$$U|_{t=0} = f(x), \quad \left. \frac{\partial n}{\partial t} \right|_{t=0} = F(x) \quad (6)$$

Слід зазначити, що до розв'язку цієї задачі не можна застосувати метод розділення змінних Фур'є, оскільки граничні умови (5) неоднорічні. Але ця задача легко зводиться до задачі з нульовими граничними умовами [10].

Ведемо допоміжну функцію:

$$W(x, t) = \kappa_1(t) + [\kappa_2(t) - \kappa_1(t)] \times \frac{x}{l} \quad (7)$$

Зрозуміло, що:

$$W|_{x=0} = \kappa_1(t), \quad W|_{x=l} = \kappa_2(t) \quad (8)$$

Розв'язок задачі (4) – (6) розписується у вигляді суми:

$$U(x, t) = W(x, t) + V(x, t), \quad (9)$$

де: $V(x, t)$ – нова невідома функція аргументів x та t .

Завдяки граничним умовам (5), (8) й початковим умовам (6), функція $V(x, t)$ повинна задовольняти граничним умовам:

$$V|_{x=0} = 0, \quad V|_{x=l} = 0 \quad (10)$$

а також початковим умовам:

$$V|_{t=0} = U|_{t=0} - W|_{t=0} = f(x) - \kappa_1(0) - [\kappa_2(0) - \kappa_1(0)] \times \frac{x}{l} = f_1(x), \quad (11)$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial n}{\partial t} \right|_{t=0} - \left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{t=0} = F(x) - \kappa_1'(0) - [\kappa_2'(0) - \kappa_1'(0)] \times \frac{x}{l} = F_1(x) \quad (12)$$

У (12) штрих означає похідну по часу t .

Підставляючи тепер (9) у рівняння (4), матимемо:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + q(x, t) + a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (13)$$

або, враховуючи (7), матимемо:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + q_1(x, t) \quad (14)$$

де

$$q_1(x, t) = q(x, t) - \kappa_1''(t) - [\kappa_2''(t) - \kappa_1''(t)] \times \frac{x}{l} \quad (15)$$

У (15)

$$\kappa_1''(t) = \frac{\partial^2 \kappa_1(t)}{\partial t^2}, \quad \kappa_2''(t) = \frac{\partial^2 \kappa_2(t)}{\partial t^2}$$

Таким чином, ми прийшли до наступної задачі для функції $v(x, t)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + q_1(x, t) \\ v|_{x=0} = 0, v|_{x=l} = 0, v|_{t=0} = f_1(x), \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{t=0} = F_1(x) \end{cases} \quad (16)$$

Будемо шукати розв'язок задачі (16) у вигляді суми:

$$V(x, t) = V_1(x, t) + W_1(x, t) \quad (17)$$

де $V_1(x, t)$ є розв'язком неоднорідного рівняння

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + q_1(x, t), \quad q_1(x, t) = q_1(x, t) \quad (18)$$

що задовольняє граничним умовам:

$$v_1|_{t=0} = 0, \quad v_1|_{x=l} = 0 \quad (19)$$

й початковим умовам:

$$v_1|_{t=0}, \quad \frac{\partial v_1}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0 \quad (20)$$

а $w_1(x, t)$ є розв'язком однорідного рівняння:

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}, \quad (21)$$

що задовольняє граничним умовам:

$$w_1|_{x=0} = 0, \quad w_1|_{x=l} = 0 \quad (22)$$

й початковим умовам:

$$w_1|_{t=0} = f_1(x), \quad \frac{\partial w_1}{\partial t} \Big|_{t=0} = F_1(x), \quad (23)$$

Розв'язок $v_1(x, t)$ описує вимушені коливання стрижня, тобто такі коливання (стрічки конвеєра), котрі здійснюються під дією зовнішньої вимушеної сили, коли початкові збурення відсутні.

Розв'язок $w_1(x, t)$ представляє вільні коливання стрижня (стрічки конвеєра), тобто такі коливання, котрі відбуваються тільки у зв'язку з наявністю початкового збурення системи.

Розв'язок задачі (21)–(23) можна подати у вигляді [10]:

$$w_1(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \times \cos\left[\frac{k\pi at}{l}\right] + b_k \times \sin\left[\frac{k\pi at}{l}\right]) \times \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \quad (24)$$

де коефіцієнти a_k, b_k знаходимо зі співвідношень:

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l f_1(x) \times \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) dx, \quad b_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^l F_1(x) \times \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) dx \quad (25)$$

Розв'язок $v_1(x, t)$ будемо шукати у вигляді ряду:

$$v_1(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \times \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \quad (26)$$

тоді умови (19) задовольняються автоматично.

Визначимо тепер функцію $T_k(t)$ так, щоб ряд (26) задовольняв рівнянню (18) й початковим умовам (20).

Підставляючи ряд (26) у рівняння (18), матимемо:

$$\sum_{k=1}^{\infty} [T_k''(t) + w_k^2 \times T_k(t)] \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) = g_1(x, t) \quad (27)$$

де покладемо:

$$w_k = \frac{k\pi a}{l} \quad (28)$$

Розкладаємо функцію $g_1(x, t)$ у інтервалі $(0, l)$ у ряд Фур'є за синусами:

$$g_1(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} g_{1k}(t) \times \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \quad (29)$$

де

$$g_{1k}(t) = \frac{2}{l} \int_0^l g_1(\xi, t) \times \sin\left(\frac{k\pi \xi}{l}\right) d\xi \quad (30)$$

Порівнянюючи розклад (27) й (29) для однієї й тієї ж функції $g_1(x, t)$, матимемо диференціальні рівняння:

$$T_k''(t) + w_k^2 T_k(t) = g_{1k}(t), \quad k = 1, 2, 3 \dots \quad (31)$$

які визначають функції $T_k(t)$.

Щоб розв'язок V_1 , який визначається рядом (26), задовольняв початковим умовам (20), достатньо підпорядкувати функції $T_k(t)$ умовам:

$$T_k(0) = 0, \quad T_k'(0) = 0, \quad k = 1, 2, 3 \dots \quad (32)$$

Розв'язок рівнянь (31) за початкових умов (32) має вид:

$$T_k(t) = \frac{1}{w_k} \int_0^l g_{1k}(\tau) \sin[w_k(t - \tau)] d\tau \quad (33)$$

або підставляючи замість $g_{1k}(\tau)$ його вираз (30):

$$T_k(t) = \frac{2}{lw_k} \int_0^t d\tau \int_0^l g_1(\xi, \tau) \sin[w_k(t - \tau)] \sin\left(\frac{k\pi\xi}{l}\right) d\xi \quad (34)$$

Отже, розв'язок задачі (16) має вигляд:

$$V(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ a_k \cos\left(\frac{k\pi at}{l}\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi at}{l}\right) \right\} \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \quad (35)$$

Загальний розв'язок задачі (4)–(6) має вид:

$$U(x, t) = u_1(t) + [u_2(t) - u_1(t)] \frac{x}{l} + \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ a_k \cos\left(\frac{k\pi at}{l}\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi at}{l}\right) \right\} \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \quad (36)$$

$k=1$ де $T_k(t)$ знаходимо з (34), a_k й b_k з (25).

Отже, розв'язок $U(x, t)$ має три складові:

1) Визначається законами руху кінцівок ($x=0$, $x=l$) стрижня/стрічки.

2) Визначається вимушеними силами (коливаннями) стрижня/стрічки.

3) Визначається власними (вільними) коливаннями стрижня/стрічки, обумовленими початковими (ненульовими) умовами (збуреннями) у системі.

У таблиці наведені значення w_k для різних a та l стрчкового конвеєру.

Значення w_k, c^{-1} для різних a , м/с та l, m ($k=1$ -основний тон коливань).

l, m	$a, m/s$							
	10	50	100	300	500	1000	2000	3000
3	10,47	52,36	104,72	314,16	523,60	1047,20	2094,40	3141,60
5	6,28	31,36	62,83	188,16	314,16	628,32	1256,64	1884,96
10	3,14	15,71	31,42	94,25	157,08	314,16	628,32	942,48
20	1,57	7,86	15,71	47,13	78,54	157,08	314,16	471,24
30	1,05	5,24	10,47	31,42	52,36	104,72	209,44	314,16
50	0,628	3,142	6,284	18,85	31,416	62,832	125,664	188,496

У технічних конструкціях стрічкових конвеєрів зустрічаються випадки, коли у окремих внутрішніх точках на механічну систему накладаються кінематичні чи динамічні зв'язки.

Так, довгі стрічкові конвеєри часто мають кілька станцій натягу стрічки, приведені маси та жорсткості котрих повинні враховуватись при динамічному розрахунку тягового органу.

Якщо у внутрішній точці $X=X_i$ до стрічкового конвеєру прикладена пружна сила (зв'язок) із жорсткістю C_i й масою m_i , тоді у цій точці повинна виконуватись умова [8]:

$$\left(ES' \frac{\partial n}{\partial x} \right) \Big|_{x=x_i+0} - \left(ES' \frac{\partial n}{\partial x} \right) \Big|_{x=x_i-0} = C_i U(x_i, t) + m_i \frac{\partial^2 n(x_i, t)}{\partial t^2} \quad (37)$$

Розрахунок систем, які описуються хвильовим рівнянням, зі вказаними дискретними зв'язками доцільно здійснювати методами, аналогічними тим, які використовуються при розгляді згинних коливань стрічки з проміжними граничними умовами [8].

Висновки

1. Обґрунтована дискретно-континуальна модель руху стрічкового конвеєру, яка на відміну від роботи [8], дозволяє враховувати рух кінців стрічки, які з'єднані з приводом конвеєру. Таким чином, у даній моделі роботи стрічкового конвеєру сама стрічка є складовою складної механічної системи: зі зосередженими (привод або приводи, з якими з'єднана стрічка конвеєра у своїх кінцях) параметрами; із континуальними (розподіленими) параметрами – сама стрічка, на поверхні якої знаходиться вантаж, що транспортується. Визначені власні частоти коливань такої механічної системи за різних значень довжини стрічки й для різних швидкостей розповсюдження у ній поздовжніх хвиль.

2. Отримані у роботі результати можуть у подальшому слугувати для уточнення і вдосконалення існуючих інженерних методів розрахунку побічних механічних систем як на стадіях їх проектування/конструювання, так і у режимах реальної експлуатації.

Список літератури

1. *Потураев В. Н., Червоненко А. Г., Колосов Л. В.* Вертикальный транспорт на черных предприятиях. Москва. Недра. 1975. 351 с.
2. *Горошко О. А.* Динамика упругих конструкций в условиях свободного полета. Киев. Наукова думка. 1965. 168 с.
3. *Горошко О. А., Савин Г. И.* Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины. Киев. Наукова думка. 1971. 224 с.
4. *Динник А. И.* Статьи по черному делу. Москва. Углетехиздат. 1957. 195 с.
5. *Лазарян В. А.* О динамических усилиях в упряжных приборах поездов при трогании с места. Научные труды ДИИЖТ. 1945. Вып. 15. С. 52–85.
6. *Лазарян В. А.* О применении метода обобщенных координат к исследованию вынужденных продольных колебаний стержней. Научные труды ДИИЖТ. 1948. Вып. 19. С. 53–67.
7. *Штокман И. Г.* Динамика тяговых цепей рудничных скребковых конвейеров. Москва. Гостехиздат. 1959. 304 с.
8. *Червоненко А. Г., Раздольский А. Г., Заболотный Ю. В.* Динамика протяженных горных транспортных машин. Киев. Наукова думка. 1983. 192 с.
9. *Новиков Е. Е., Смирнов В. К.* Введение в теорию динамики горнотранспортных машин. Киев. Наукова думка. 1978. 173 с.
10. *Коштыков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.* Уравнения в частных производных математической физики. Москва. Высшая школа. 1970. 712 с.

References

1. *Poduraev, V. N., Chervonenko, A. G., Kolosov, L. V.* (1975). Vertical transport of black enterprises. Moscow. Bowels. 351.
2. *Goroshko, E. A.* (1965). Dynamics of elastic structures under conditions of free flight. Kiev. Scientific thought. 1965. 168.

3. Goroshko, E. A., Savin, G. S. (1971). Introduction to the mechanics of one dimensional deformable bodies of variable length. Kiev. Scientific thought. 224.
4. Dynnik, A. S. (1957). Articles on black business. Moscow. Whiteheat. 195.
5. Lazaryan, V. A. (1945). Dynamic efforts to draft instruments of trains when pulling away. Scientific works of DIYET. 15. 52–85.
6. Lazaryan, V. A. (1948). Use of the method of generalized coordinates to the study of the forced longitudinal oscillations of rods. Scientific works of DIYET. 19. 53–67.
7. Stockman, S. G. (1959). Dynamics of traction chains for mining conveyors. Moscow. Gostehizdat. 304.
8. Chervonenko, A. G., Razdolsky, A. G., Zabolotny, Y. V. (1983). Dynamics of extended mountain transport cars. Kiev. Scientific thought. 192.
9. Novikov, E. E., Smirnov, V. K. (1978). Introduction to the theory of dynamics of mining machines. Kiev. Scientific thought. 173.
10. Kostiaikov, N. S., Gleaner, E. B., Smirnov, M. M. (1970). Partial differential Equations of mathematical physics. Moscow. High school. 712.

ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ЛЕНТОЧНОГО КОНВЕЙЕРА

И. Н. Сивак, Ю. В. Човнюк

Аннотация. Приведена дискретно-континуальная модель движения ленточного конвейера. Волнообразования возникающие в ленте конвейера, транспортирующего груз рассмотрены с позиций динамики системы с распределёнными параметрами. Используются методы математической физики и аппарат Фурье. Обоснована дискретно-континуальная модель движения ленточного конвейера, которая в отличие и позволяет учитывать движение концов ленты, которые соединены с приводом конвейера. Таким образом, в данной модели работы ленточного конвейера сама лента является составной сложной механической системы.

Ключевые слова: дискретность, континуальность, модель, движение, ленточный конвейер

DISCRETE-CONTINUAL MODEL OF MOTION OF BELT CONVEYOR

I. M. Sivak, Yu. V. Chovnyuk

Abstract. The discrete-continuum model of the belt conveyor movement is presented. The waveforms that arise in the conveyor belt transporting the load are considered from the position of dynamics of the system with distributed parameters. Used methods of mathematical physics and Fourier apparatus. The discrete-continuum model of belt conveyor motion is justified, which, in contrast to allows to take into account the motion of tape ends that are connected to the conveyor drive. Thus, in this model of the belt conveyor operation, the tape itself is a composite of a complex mechanical system.

Key words: discreteness, continuity, model, movement, belt conveyor