

задач с импульсным воздействием в случае, когда условие $P_{B_0} = 0$, $P_{B_0}P_{Q_0^*} = 0$ не выполняется.

Слабовозмущенная линейная неоднородная краевая задача, однородная краевая задача с импульсным воздействием, ортопроектор, ряд, псевдообратная матрица.

It is proposed and proved a theorem to obtain sufficient conditions for the existence of solutions of weakly perturbed linear inhomogeneous boundary value problem in the case where the condition $P_{B_0} = 0$, $P_{B_0}P_{Q_0^} = 0$ is not fulfilled.*

Weakly perturbed linear inhomogeneous boundary value problem, homogeneous boundary value problem with impulse action, orthogonal projector, series, pseudoinverse.

УДК 517.51

ТОПОЛОГІЧНА ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ФУНКЦІЙ

Т. Г. Криворот, асистент

Мовою альтернуючих послідовностей досліджено топологічну еквівалентність функцій. Доведено, що для кожної кусково-лінійної функції, яка має $n-1$ локальний екстремум, існує поліном степеня n , що є топологічно еквівалентний цій функції.

Топологічна еквівалентність, поліном, альтернуюча послідовність, кусково-лінійна функція.

Серед багатьох проблем, які стоять перед математиками, однією з важливих є дослідження поведінки функцій на різноманітних многовидах. Відомо, що багато процесів можна описати за допомогою гладких функцій [1], [4]. Наприклад, такі науки, як біологія, біофізика, фізика зараз суттєво використовують математичні знання відносно поведінки гладких функцій в околі критичних точок.

У теорії функцій важливим напрямком є проблема дослідження умов топологічної еквівалентності функцій. Цією проблемою займалися М. Морс, В. Каплан, В.В. Шарко, О.О. Пришляк, В.А. Арнольд, А.Т. Фоменко, С. Стоілов.

Мета досліджень – розгляд топологічної еквівалентності функцій зі скінченним числом екстремальних точок, наведення топологічної класифікації таких функцій з подальшим дослідженням умови їх топологічної еквівалентності.

Матеріали та методика досліджень. Для кожного класу еквівалентності вводиться невід'ємна функція, яка приймає в точках екстре-

мумів всі цілі значення з множини $0,1,2,\dots,l$. Інваріантом функції, що дає відповідь на поставлені запитання, є альтернуючі послідовності [3], [4], [5].

Результати досліджень. Було розв'язано задачу про існування полінома топологічно еквівалентного кусково-лінійній функції.

Нехай X, Y – топологічні простори; $f, g: X \rightarrow Y$ неперервні відображення. Неперервне відображення $f: X \rightarrow Y$ між топологічними просторами X і Y називається гомеоморфізмом, якщо f є бієкцією та обернене відображення $f^{-1}: X \rightarrow Y$ – неперервне.

Означення 1. Неперервні відображення $f, g: X \rightarrow Y$ називаються *топологічно еквівалентними*, якщо існують гомеоморфізми $h: X \rightarrow X$ і $h': Y \rightarrow Y$, для яких виконується рівність $g \circ h = h' \circ f$.

Топологічна еквівалентність відображень — це комутативна діаграма

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ h \downarrow & & \downarrow h' \\ M & \xrightarrow{g} & N \end{array},$$

в якій вертикальними стрілками є гомеоморфізми.

Розглянемо випадок, коли $N = R$, тобто коли задано дві неперервні (гладкі) функції f і g , і будемо називати їх *топологічно еквівалентними*, якщо гомеоморфізм h' зберігає орієнтацію прямої R .

Питання, коли дві неперервні функції f і g зі скінченною кількістю екстремумів, які задані на відрізку $[a, b]$, будуть топологічно еквівалентними і скільки є різних типів таких топологічно еквівалентних функцій, у яких однакова кількість екстремумів приводять до вивчення комбінаторних об'єктів [2]. Відомо, що для послідовності додатних цілих чисел $0, 1, 2, \dots, n$, існує $(n+1)!$ перестановок цих чисел.

Адекватним інваріантом функції, який дає відповідь на поставлені запитання, є альтернуючі послідовності [4].

Означення 2. Альтернуючою послідовністю $A(k, l)$

1-го типу: $\langle \rangle$ назвемо послідовність $x_i, (0 \leq i \leq k)$, побудовану з чисел $0, 1, \dots, l$, для якої справедлива умова: $x_0 < x_1 > x_2 < x_3 > \dots < x_{k-1} > x_k$, де $l \leq k-1$;

2-го типу: $\langle \langle$ назвемо послідовність $x_i, (0 \leq i \leq k)$, для якої справедлива умова: $x_0 < x_1 > x_2 < x_3 > \dots > x_{k-1} < x_k$, де $l \leq k-1$;

3-го типу: $\rangle \rangle$ назвемо послідовність $x_i, (0 \leq i \leq k)$, для якої справедлива умова: $x_0 > x_1 < x_2 > x_3 < \dots < x_{k-1} > x_k$, де $l \leq k-1$;

4-го типу: $\rangle \langle$ назвемо послідовність $x_i, (0 \leq i \leq k)$, для якої справедлива умова: $x_0 > x_1 < x_2 > x_3 < \dots > x_{k-1} < x_k$.

Саме мовою альтернуючих послідовностей буде дано відповідь на поставлені запитання про топологічну еквівалентність функцій.

Альтернуючі послідовності будуються згідно з послідовністю значень функції в екстремальних точках, яка задана на відрізку. В послідовностях всіх типів можливі випадки, коли не всі числа $1, 2, \dots, l$ присутні. Якщо

в альтернуючій послідовності присутні всі числа $1, 2, \dots, l$, то будемо говорити, що альтернуюча послідовність відповідного типу є повною.

З визначення топологічної еквівалентності для неперервних функцій зі скінченною кількістю екстремумів випливає, що в кожному класі еквівалентності присутня невід'ємна функція, яка приймає в точках екстремумів всі цілочислові значення з множини $0, 1, 2, \dots, l$ [3], [4].

Поставимо у відповідність функції f на відрізку $[a, b]$ повну альтернуючу послідовність відповідного типу $A(k, l)$. Для цього розглянемо на відрізку $[a, b]$ послідовність $y_i, (0 \leq i \leq k)$ локальних екстремумів функції $f(y_0 = a, y_k = b), y_i < y_{i+1}$.

Позначимо через $x_i = f(y_i)$. Припустимо, що $f(a) < x_i; f(b) < x_{k-1}$. Тоді, очевидно, що послідовність $x_0 < x_1 > x_2 < x_3 > \dots < x_{k-1} > x_k$ утворює повну альтернуючу послідовність $A(k, l)$ типу $<>$. Побудова інших типів альтернуючих послідовностей є аналогічною.

Якщо розглянути на відрізку $[a, b]$ довільну неперервну функцію $y = f(x)$ зі скінченною кількістю локальних екстремумів, то за допомогою гомеоморфізму числової прямої $s: R^1 \rightarrow R^1$, що зберігає орієнтацію, функцію $y = f(x)$ можна замінити на функцію $z = s \circ f(x)$, яка вже буде відміченою функцією. Очевидно, якщо точка y_i – локальний максимум (мінімум) для функції f , то вона буде локальним максимумом (мінімумом) для функції $s \circ f$ і навпаки [1].

Оскільки гомеоморфізм s зберігає порядок точок, розташованих на числовій осі, то для сусідніх екстремальних точок y_i і y_{i+1} функції f нерівність $f(y_i) < f(y_{i+1})$ ($f(y_i) > f(y_{i+1})$) зберігається для функції $s \circ f$, тобто $s \circ f(y_i) < s \circ f(y_{i+1})$ ($s \circ f(y_i) > s \circ f(y_{i+1})$). Таким чином, неперервній функції $y = f(x)$ зі скінченною кількістю локальних екстремумів однозначно можна поставити у відповідність повну альтернуючу послідовність $A_f(k, l)$ певного типу залежно від кількості екстремумів функції f і значень, які функція f набуває в екстремальних точках.

Отже, для довільного класу еквівалентності неперервної функції $y = f(x)$ зі скінченною кількістю локальних екстремумів, яка задана на відрізку $[a, b]$, однозначно будується альтернуюча послідовність.

Нехай задана повна альтернуюча послідовність $A(k, l)$. Тоді, послідовності $A(k, l)$ можна поставити у відповідність кусково-лінійну криву $L(A(k, l))$. Зрозуміло, що кусково-лінійну криву $L(A(k, l))$ можна трактувати як графік неперервної функції $L(A(k, l))$ з $k+1$ локальними екстремумами та l значеннями в них, яка задана на відрізку $[a, b]$. Ясно, що внутрішні екстремальні точки вибираються неоднозначно, але їх порядок розташування на відрізку $[a, b]$ завжди один і той же.

Означення. Для повної альтернуючої послідовності $A(k, l)$ кусково-лінійну функцію $L(A(k, l))$ будемо називати *PL - реалізацією* послідовності $A(k, l)$.

Лема 1. Нехай на відрізку $[a, b]$ задана неперервна функція f зі скінченною кількістю екстремальних точок. Поставимо їй у відповідність її повну альтернуючу послідовність $A_f(k, l)$. Тоді функції f і $L(A_f(k, l))$ будуть топологічно еквівалентними.

Теорема 1. Дві неперервні функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ на відрізку $[a, b]$ зі скінченною кількістю локальних екстремумів будуть топологічно еквівалентними тоді і тільки тоді, коли збігаються їх повні альтернуючі послідовності $A_f(k, l)$ і $A_g(k, l)$.

Для довільної повної альтернуючої послідовності $A(k, l)$ можна побудувати таку неперервну на відрізку $[a, b]$ функцію зі скінченною кількістю локальних екстремумів, що її повна альтернуюча послідовність $A_f(k, l) \in A(k, l)$ [4].

Вибір гомеоморфізмів h і h' не є однозначним. Отже, якщо зафіксувати топологічні простори X і Y , то природно виникає дві задачі: 1) описати множину класів неперервних відображень з X і Y відносно введеного відношення еквівалентності; 2) вказати необхідні та достатні умови, коли два неперервних відображення f і g з X в Y будуть топологічно еквівалентними. Ці дві задачі дуже складні і відповідь не відома, наприклад, коли $X = Y = R^1$. Тому, ми будемо розглядати не загальний випадок, а обмежимося більш вузькими класами неперервних відображень, зокрема поліноміальними [5].

Гомеоморфізм $h' : R^1 \rightarrow R^1$ зберігає орієнтацію, тобто задається строго монотонно зростаючою функцією. Якщо функції $f : X \rightarrow R^1$ і $g : X \rightarrow R^1$ – топологічно еквівалентні і точка $x_0 \in X$ є точкою локального максимуму (мінімуму) функції f , точка $h(x)$ буде точкою локального максимуму (мінімуму) функції g . Якщо $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$ – строго монотонна неперервна функція, то вона топологічно еквівалентна лінійній функції f , заданій на $[a, b]$ з безліччю значень, рівними $[c, d]$. Тут $[a, b]$ і $[c, d]$ – інтервали числової прямої, які можуть бути нескінченними.

Лема 2. Нехай $f : R^1 \rightarrow R^1$ – неперервна функція зі скінченним числом локальних екстремумів, тоді f топологічно еквівалентна кусково-лінійній функції.

Наслідок. Нехай $f : R^1 \rightarrow R^1$ – поліном, тоді він топологічно еквівалентний кусково-лінійній функції.

Теорема 2. (допоміжна) Нехай $\xi_1 \leq \xi_2 \leq \dots \leq \xi_{n-1}$, $\eta_1, \dots, \eta_{n-1}$ – дійсні числа. Тоді існує поліном $f : R^1 \rightarrow R^1$ степеня n такий, що $f'(\xi_i) = 0$; $f(\xi_i) = \eta_i, i = \overline{1, n-1}$ тоді і лише тоді, коли числа $(-1)^i (\eta_i - \eta_{i-1}), i = \overline{2, n-1}$ одного знака.

Теорема 3. Для кожної кусково-лінійної функції $l : R^1 \rightarrow R^1$, що має $n-1$ локальних екстремумів, існує поліном $f : R^1 \rightarrow R^1$ степеня n , який є топологічно еквівалентним функції l .

Доводимо, що f топологічно еквівалентний l . Потрібно знайти такі гомеоморфізми, щоб $f \circ h = h' \circ l$. Припустимо, що $h'(x) = x$, для довільного

[illegible]

Отже, $f \circ h = h' \circ l = l$.

Висновки

Список літератури

1. Андрію О.П. Функції на одновимірних многовидах: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд.. фіз.-мат. наук: спец. 01.01.01 «Математичний аналіз» / О.П. Андрію. – К., 2006. – 19 с.
2. Арнольд В.И. Исчисление змей и комбинаторика чисел Бернулли, Эйлера и Спрингера групп Кокстера / В.И. Арнольд // Успехи мат. наук. – 1992. – Т.47, №1(283). – С. 3-45.
3. Арнольд В.И. Особенности дифференцируемых отображений / Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М. – М.: Наука, 1982. – Т.1. – 440 с.
4. Шарко В.В. Гладкая и топологическая эквивалентность функций на поверхностях / В.В. Шарко // Укр. мат. журн. – 2003. – Т.55, №5. – С.687 – 700.
5. Шевчук И.А. Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций / И.А.Шевчук. – К.: Наук. думка, 1992. – 223 с.

292

Топологическая эквивалентность, полином, альтернирующая последовательность, кусково-линейная функция.

Topological equivalence of functions was studied by the language of alternating sequences. It is proved that for every piecewise-linear function with $n-1$ local extrema, there polynomial degree n , which is topologically is equivalent to this function.

Topological equivalence, polynomial, alternating sequence, piecewise-linear function.