

Рассмотрен аналог модуля гладкости Дитзиана-Тотика - D-модуль гладкости для функций, непрерывных на кусочно-гладких кривых комплексной плоскости. Приведена конструктивная характеристика классов функций, характеризующихся D-модулем гладкости.

Приближение функций, комплексная плоскость, множества с кусочно-гладкой границей, D-модуль гладкости, конструктивная характеристика.

We introduce the analog of modules of smoothness Ditziana-Totika - D-module of smoothness for functions on continuous piecewise smooth curves of the complex plane. We consider the structural characterization of functions classes that are characterized by D-modules of smoothness.

Function approximation, complex plane, piecewise smooth curves, D-module of smoothness, structural characterization.

УДК 517.51

ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ФУНКЦІЙ, ЗАДАНИХ НА КОЛІ

***Ю.Б. Гнучій, доктор фізико-математичних наук
Т.Г. Криворот, асистент***

У термінах інваріанта розглянуто топологічну еквівалентність неперервних функцій, заданих на колі зі скінченним числом екстремумів. Інваріантом функції, що дає можливість підрахувати число топологічно нееквівалентних функцій, є $\Omega(f)$ – розбиття S^1 на дуги S_i , значення функцій в їх локальних екстремумах, що утворюють змій певного типу.

Критерій, еквівалентність, функція, многовид, екстремум, послідовності.

Питання класифікації та дослідження умов топологічної еквівалентності функцій на многовидах є важливим напрямком топології. Цією проблемою займалися В.І. Арнольд, Дж.Дженкінс, В.Каплана, С.І. Максименко, М.Морс, О.О. Пришляк, В.В. Шарко.

Мета досліджень – встановлення критерію топологічної еквівалентності функцій, що задані на колі та приймають скінченне число критичних значень.

Матеріали та методика досліджень. Для побудови інваріанта неперервних функцій, заданих на колі, використовувалися методи топології та топологічної комбінаторики. Це дало можливість підрахувати число топологічно нееквівалентних функцій. Інваріантом функції, що дає

відповідь на поставлене питання, виступають A_{2n-1} –змії та R_m^n – змії [4].

Результати досліджень. Досліджено інваріант неперервних функцій, заданих на колі зі скінченним числом екстремумів, що дало можливість підрахувати число топологічно нееквівалентних функцій. Розглянуто загальний випадок, коли число критичних значень функції не дорівнює числу локальних екстремумів та функція має m глобальних максимумів (мінімумів). Інваріантом такої функції є $\Omega(f)$ – розбиття S^1 на дуги S_i , значення функцій в їх локальних екстремумах, утворюють L_m^n – змії

Розглянемо випадок неперервних функцій Морса із скінченним числом критичних точок (локальних екстремумів), які задані на 1-вимірному компактному многовиді без краю (колі).

Задача про знаходження числа топологічно нееквівалентних функцій Морса на колі зводиться до комбінаторики перестановок [1]. Це лише частковий випадок, виникають функції, для яких одному критичному значенню відповідає принаймні два локальних екстремуми.

Нехай X, Y — топологічні простори; $f, g: X \rightarrow Y$ неперервні відображення. Неперервне відображення $f: X \rightarrow Y$ між топологічними просторами X і Y називається гомеоморфізмом, якщо f є бієкцією та обернене відображення $f^{-1}: X \rightarrow Y$ – неперервне.

Неперервні відображення $f, g: X \rightarrow Y$ називаються топологічно еквівалентними, якщо існують гомеоморфізми $h: X \rightarrow X$ і $h': Y \rightarrow Y$, для яких виконується рівність $g \circ h = h' \circ f$.

Альтернуючі послідовності будуються згідно з послідовністю значень функції в екстремальних точках, яка задана на відрізку. В послідовностях всіх типів можливі випадки, коли не всі числа $1, 2, \dots, l$ присутні. Якщо в альтернуючій послідовності присутні всі числа $1, 2, \dots, l$, то будемо говорити, що альтернуюча послідовність відповідного типу є повною.

З визначення топологічної еквівалентності для неперервних функцій зі скінченною кількістю екстремумів випливає, що в кожному класі еквівалентності присутня невід'ємна функція, яка приймає в точках екстремумів всі цілочислові значення з множини $0, 1, 2, \dots, l$ [2, 5].

Позначимо через S^1 коло, тобто множину комплексних чисел z таких, що $|z|=1$. Розглядаємо S^1 як диференційований многовид розмірності 1. Зафіксуємо на S^1 орієнтацію і розглянемо довільну неперервну функцію f на S^1 зі скінченним числом локальних екстремумів. Точкою локального максимуму (мінімуму) функції f є точка $x^0 \in S^1$, для якої існує окіл $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset S^1$ точки x^0 такий, що для всіх точок y з інтервалів $(-\varepsilon, x^0)$, (x^0, ε) справедлива нерівність $f(y) < f(x^0)$ ($f(y) > f(x^0)$), причому точками локального екстремуму функції f будуть всі точки локальних максимумів (мінімумів) функції f . Оскільки $\chi(S^1) = 0$ (Ейлерова характеристика), то число локальних екстремумів завжди парне (число локальних мінімумів дорівнює числу локальних максимумів).

Позначимо через m_i та M_j , $i, j = \overline{1, n}$ відповідно точки мінімуму та максимуму цієї функції. Рухаючись по колу в заданому напрямку та нумеруючи окремо локальні мінімуми та максимуми, отримаємо одну із двох можливих послідовностей, які утворюють локальні екстремуми: $M_1, m_1, M_2, m_2, \dots, M_n, m_n$ або $m_1, M_1, m_2, M_2, \dots, m_n, M_n$.

Перша послідовність справедлива тоді, коли починаємо рух з локального максимуму функції, а друга – з локального мінімуму.

Нехай деяка функція $f: S^1 \rightarrow R$ приймає в $2n$ локальних екстремумах k різних значень. Глобальним мінімумом (максимумом) назовемо локальний екстремум, що відповідає найменшому (найбільшому) значенню функції. У загальному випадку їх число скінченне.

Нехай $2n = k$.

Функція f називається спеціальною, якщо в довільних двох локальних екстремумах вона приймає різні значення.

Розглянемо S^1 та спеціальну функцію f , яка має $2n$ локальних екстремуми. Починаючи з глобального мінімуму та в заданому напрямку на S^1 , позначимо локальні екстремуми через $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{2n-1}$ та отримаємо послідовність значень функції $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \dots, y_{2n-1} = f(x_{2n-1})$, які задовольняють таку систему нерівностей:

$$y_0 < y_1 > \dots < y_{2n-3} > y_{2n-2} < y_{2n-1}. \quad (1)$$

Задамо відображення $y_i \rightarrow z_i$, де $i; z_i \in [0, 1, \dots, 2n-1]$ і z_i рівне числу значень y_i таких, що $y_i < y_j$. Числа z_i утворюють *up down* послідовність, яка визначає A_{2n-1} змію. Запишемо цю систему нерівностей у такому вигляді:

$$0 < z_1 > z_2 < \dots < z_{2n-1}. \quad (2)$$

За допомогою гомеоморфізму осі z , який змінює напрямки осі і зберігає порядок, перетворимо (2) у *up down* послідовність та отримаємо $z'_0 < z'_1 > \dots < z'_{2n-2}$, де $0 < z'_0 < 2n-3$. Звідки випливає, що число послідовностей рівне числу a_{2n-2} . Тому справедливі такі теореми.

Теорема 1. Число топологічно нееквівалентних спеціальних функцій f , заданих на S^1 , з $2n$ локальними екстремумами, рівне Tn .

Зауважимо, що змія є інваріантом цього класу функцій: топологічно нееквівалентним функціям відповідають різні змії і навпаки – кожна змія реалізує деяку функцію.

Теорема 2. Число топологічно нееквівалентних функцій f з $2n$ локальними екстремумами, серед яких лише один глобальний мінімум (максимум) та k різних значень, які приймає функція в цих екстремумах ($k < 2n$), рівне μ_{k-1}^{2n-1} .

Доведення. Не обмежуючи загальності, розглянемо випадок єдиного глобального мінімуму. Тоді, починаючи з нього та в заданому напрямку на S^1 , позначимо локальні екстремуми через $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{2n-1}$ та отримаємо таку послідовність критичних значень функцій $y_0, y_1, y_2, \dots$,

y_{2n-1} , серед яких є k різних. Задамо відображення $y_i \rightarrow z_i$, де $z_i \in [0, \dots, k]$, і z_i рівне числу критичних значень y_l таких, що $y_l < y_i$. Згідно з умовою, існує єдиний локальний екстремум – мінімум x_0 для якого $z_0=0$. Рухаючись по колу в заданому напрямку, утворимо деяку послідовність цілих чисел $0 < z_1 > z_2 < \dots < z_{2n-1}$, де $z_i \neq 0$, $z_i \leq k-1$. Тоді, згідно з означенням, це зм'я типу R_{k-1}^{2n-1} , причому лише $z_0=0$ і решта $z_i \neq 0$. Число таких змій рівне μ_{k-1}^{2n-1} .

Для доведення твердження у випадку одного глобального максимуму достатньо розглянути функцію $-f$.

Нехай $f : S^1 \rightarrow R$ деяка неперервна функція зі скінченним ($2n$) числом локальних екстремумів, серед яких m глобальних максимумів та k різних значень, які приймає функція в $2n$ екстремумах ($k < 2n$). Зрозуміло, що тоді серед локальних екстремумів існує принаймні два, значення функції в яких збігаються.

Побудуємо комбінаторний інваріант для функції f . Зафіксуємо деякий напрямок обходу на колі і позначимо m глобальних максимумів через $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{m-1}$. Для кожного x_i знайдемо дугу S_i^0 таку, що значення функції y_i в локальних екстремумах дуги S_i^0 є різними. Причому, кінцями цих дуг будуть локальні мінімуми. Нехай $x_{1,i}$ – перший локальний екстремум (мінімум), що лежить на колі за максимумом x_i в напрямку, що протилежний до напрямку обходу, а $x^{i,1}$ перший локальний екстремум (мінімум) у напрямку, що збігається з напрямком обходу, $x_{2,i}$ і $x^{i,2}$ відповідно другі і т.д. Утворимо таку послідовність локальних екстремумів $x_{l^i,i}, \dots, x_{1,i}, x_i, x^{i,1}, \dots, x^{i,r^i+1}$ що відповідає глобальному максимуму x_i і належить дузі S_i^0 , кінцями якої є $x_{l^i,i}$ і x^{i,r^i+1} (локальні мінімуми).

Кожній такій послідовності екстремумів відповідає послідовність значень функції, оскільки вони є різними і локальний мінімум чергується з локальним максимумом, то справедлива така система нерівностей $y_{l^i,i} < \dots > y_{1,i} < y_i > y^{i,1} < \dots < y^{i,r^i}$ (відкинемо значення y^{i,r^i} , що відповідає x^{i,r^i+1}), а згідно з означенням – це елементарна зм'я $L_{k-1}^{l^i+r^i}$.

Можливі такі випадки:

- 1) $S_0^j \cap S_{j+1}^0 = \emptyset$;
- 2) $S_0^j \cap S_{j+1}^0 = x^{j,t_j^j+1} = x_{t_j^j,j+1}$;
- 3) $S_0^j \cap S_{j+1}^0 = S_{j,j+1}^0$, де $S_{j,j+1}^0 = S_0^j \cup S_{j+1}^0$.

Будемо вважати, що деякій функції f відповідає розбиття кола $\Omega(f)$ на дуги S_i , у яких кінці в локальних мінімумах, а значення функції в локальних екстремумах цих дуг, утворюють елементарні зм'ї $L_{k-1}^{a_i}$.

Лема. Для довільної функції f існує з точністю до циклічного порядку дуг S_i єдине $\Omega(f)$ розбиття.

Доведення впливає з наведених вище міркувань та однозначності побудови $\Omega(f)$ розбиття.

Теорема 3. Дві функції f та g на колі топологічно еквівалентні тоді і тільки тоді, коли $\Omega(f) \sim \Omega(g)$.

Доведення. Необхідність. Доведення необхідності впливає з леми 1 та означення топологічної еквівалентності.

Достатність. Нехай f та g – деякі функції на колі такі, що $\Omega(f) \sim \Omega(g)$, де $\Omega(f)$, $\Omega(g)$ розбиття кола, що їм відповідають. Доведемо, що функції f та g топологічно еквівалентні. Зрозуміло, що число дуг для $\Omega(f)$ та $\Omega(g)$ одне й те ж, прийmemo його рівним q . Оскільки набори чисел $\{a_i\}$ і $\{b_j\}$ збігаються, то числа локальних екстремумів функцій f та g , які визначаються за допомогою рівностей $\sum_i a_i + q$ та $\sum_j b_j + q$, відповідно, рівні між собою.

Розглянемо $S_0 \subset \Omega(f)$, тоді згідно з означенням існує $S'_0 \subset \Omega(f)$ така, що $L_{k-1}^{a_0} = L_{k-1}^{b_i}$ і $a_0 = b_i$. Запишемо такі дві послідовності, що утворені елементарними зміями $(L_{k-1}^{a_0}, L_{k-1}^{a_1}, \dots, L_{k-1}^{a_q})$ та $(L_{k-1}^{b_i}, L_{k-1}^{b_{i+1}}, \dots, L_{k-1}^{b_{i-1}})$. Зрозуміло, що вони збігаються і $f \sim g$.

Позначимо через $G(2n, k)$ число топологічно нееквівалентних функцій на S^1 з $2n$ локальними екстремумами та k різними значеннями. Справедлива така оцінка $G(2n, k) < R_{2n-1}^{k-1}$, оскільки, дві різні змії задають одну і ту саму функцію на колі.

Висновки

Досліджено число топологічно нееквівалентних функцій деяких класів на колі: у випадку, коли число локальних екстремумів функції збігається з числом критичних значень, інваріантом є A_{2n-1} – змія; для функцій, які мають один глобальний мінімум (максимум) і число критичних значень яких менше числа їх локальних екстремумів, інваріантом є R_m^n – змії.

Розглянуто загальний випадок, коли число критичних значень функції не дорівнює числу локальних екстремумів та функція має m глобальних максимумів (мінімумів). Інваріантом такої функції є $\Omega(f)$ – розбиття S^1 на дуги S_i , значення функцій в їх локальних екстремумах утворюють L_m^n – змії (елементарні). Умовою топологічної еквівалентності двох функцій на колі є ізоморфізм розбиттів $\Omega(f)$ та $\Omega(g)$, що їм відповідають.

Список літератури

1. Арнольд В.И. Исчисление змей и комбинаторика чисел Бернулли, Эйлера и Спрингера групп Кокстера / В.И. Арнольд // Успехи мат. наук. – 1992. – Т.47, №1(283). – С. 3 – 45.
2. Арнольд В.И. Особенности дифференцируемых отображений. Т.1. / В.И. Арнольд, А.Н. Варченко, С.М. Гусейн-Заде. – М.: Наука, 1982. – 440с.
3. Куратовский К. Топология. Т.1. / К. Куратовский. – М.: Мир, 1966. – 594 с.

4. Куратовский К. Топология. Т.2. / К. Куратовский. – М.: Мир, 1969. – 624 с.
5. Шарко В.В. Гладкая и топологическая эквивалентность функций на поверхностях / В.В. Шарко // Укр. мат. журн. – 2003. – Т.55, №5. – С.687 – 700.

В терминах инварианта рассмотрена топологическая эквивалентность непрерывных функций, заданных на окружности с конечным числом экстремумов. Инвариантом функции, что дает возможность подсчитать число топологически неэквивалентных функций, есть $\Omega(f)$ – разбивка S^1 на дуги S_i , значение функций в их локальных экстремумах, образующих змеи определенного типа.

Критерий, эквивалентность, функция, многообразие, экстремум, последовательность.

In terms of the invariants considered topological equivalence of continuous functions defined on a circle with a finite number of extrema. Invariant function, which enables to calculate the number of topologically different functions, there is $\Omega(f)$ – on the partition S^1 arc S_i , value functions in their local extrema forming snake

Criterion, equivalence, function, diversity, extremum, sequence.

UDC 620.92

ANALYSIS SOLAR WATER-HEATING SYSTEMS ON THE BASIS OF EVACUATED TUBE COLLECTORS

***L. Martyniuk, PG students
V. Kozyrsky, doctor of technical science***

This paper presents main aspects the use of solar systems for heating domestic water on the example standard solar installation constructed as an object of o research in Education and Research Institute of Energetics Automatics and Energy Saving (NULES Ukraine). Obtained charts with the input and output temperature of vacuum solar collector.

Solar energy, hot water systems, collector efficiency, vacuum solar collector.

Solar hot water system comprises several innovations and many mature renewable energy technologies, which have been accepted in most countries for many years. Nowadays, the demand on heat energy has increased, and it is the natural, safe and costless process to collect hot water by solar radiations. There are many applications of the hot water heated by the solar radiations. Where the solar hot water is used in the domestic purposes, it also is used in industrial applications, e.g. used for electricity generation [1].

The effective sunshine occurs only about 5–6 h per day and since