

производной функции f и k -модулем гладкости r -й производной периодической функции $\tilde{f} = f(\cos t)$. В частности, получена оценка сверху для DT -модуля гладкости.

Ключевые слова: равномерное приближение функций, конструктивная характеристика, модули гладкости, оценка сверху

THE ESTIMATE FOR THE DT-MODULE OF SMOOTHNESS

O. Dyuzhenkova

We consider the DT -module of smoothness, introduced by Ditzian and Totik. We investigate the connection between the DT -module of smoothness of the r -s derivative of the function f and classical module of smoothness of the r -s derivative of the periodic function $\tilde{f} = f(\cos t)$. In particular, we get the upper estimate for the DT -module of smoothness.

Keywords: function approximation, constructive characteristic, modules of smoothness, the upper estimate

УДК 517.53

ПРО МНОЖИНУ СКІНЧЕННИХ РІВНІВ НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ

В.М. Сафонов, кандидат фізико-математичних наук
Національний університет харчових технологій

О.М. Нецадим, кандидат фізико-математичних наук
Національний університет біоресурсів
і природокористування України

О.П. Зінкевич, кандидат фізико-математичних наук
Національний університет харчових технологій
e-mail: oleksandr_neshchadym@mail.ru

Розглянуто неперервні функції однієї дійсної змінної, які мають множину скінченних рівнів скрізь другої категорії. Доведено, що у разі нульвимірності зазначених відображень множина їх нескінченних рівнів ніде не щільна.

Ключові слова: рівень функції, нульвимірне відображення, ніде не щільна множина, скрізь щільна множина, множина другої категорії

Особливо важливими в багатьох випадках виявляються дослідження, які пов'язані з неперервними відображеннями, що не мають інтервалів сталості.

Знання багатьох властивостей сукупності усіх рівнів функції (відображення) часто дає змогу охарактеризувати її структурні особливості.

Мета досліджень – вивчення в термінах категорії множини рівнів дійсних функцій однієї дійсної змінної.

Матеріали та методика досліджень. Використано методи теорії функцій та топології, зокрема категорний підхід для характеристики множини рівнів неперервного відображення.

Результати досліджень. Як зазвичай, через R позначимо одинимірний евклідов простір. Нехай $f: [a, b] \rightarrow R$ – неперервне відображення. Введемо такі поняття [2], [3], [5].

Досконалою множиною називається замкнена множина, кожна точка якої є граничною точкою цієї множини. Множина $A \subset R$ щільна в множині $B \subset R$, якщо кожна точка множини B є граничною точкою множини A , тобто, якщо $B \subset \bar{A}$. У разі, коли множина A щільна в R , то вона називається скрізь щільною.

Множина $A \subset R$ ніде не щільна в R , якщо кожна відкрита множина $G \subset R$ має іншу відкриту підмножину $G' \subset R$, яка не містить точок A . Замикання ніде не щільної множини $\bar{A}$ ніде не щільне в R . Об'єднання будь-якого скінченного числа ніде не щільних множин ніде не щільне. Зліченне об'єднання ніде не щільних множин не є, взагалі кажучи, ніде не щільним; воно може бути навіть щільним. Наприклад, множина раціональних точок щільна в R .

Множина $\tilde{A}$ називається множиною першої категорії в R , якщо її можна зобразити у вигляді об'єднання скінченної або зліченної сукупності ніде не щільних множин: $\tilde{A} = \bigcup_n A_n$. Як приклад множини першої категорії – множина раціональних точок в R .

Якщо ж множину $E \subset R$ не можна зобразити у вигляді об'єднання ніде не щільних множин, то вона називається множиною другої категорії в R . Наприклад, довільна відкрита множина в R являє собою таку множину.

У разі, коли доповнення $R \setminus E$ є множиною першої категорії, то множина E резидуальна, тобто вона – скрізь другої категорії або інакше – другої категорії в кожній своїй відкритій порції в R .

Замкнена множина $P \subset R$ називається нульвимірною ($\dim P = 0$), якщо вона ніде не щільна в R . Прикладами тут можуть бути довільні скінченна, а також зліченна замкнена множини в R . Нетривіальним прикладом є канторова досконала множина на відрізку $[0, 1]$ (потужності континуума у кожній своїй порції).

Розглянемо повний прообраз $f^{-1}f(x_0)$ точки $x_0 \in [a, b]$, який також будемо називати рівнем відображення f . Для неперервного f рівні його

являють собою замкнені множини в $[a, b]$, скінченні або нескінченні. Більш того, приклади показують, що існують неперервні відображення, в яких всі рівні не тільки нескінченні але і незліченні. Існують відображення, в яких всі рівні навіть досконалі, тобто не містять ізольованих точок.

Відображення f називається нульвимірним, якщо кожний його рівень є нульвимірною множиною, тобто $\dim f^{-1}f(x_0) = 0$ для будь-якого $x_0 \in [a, b]$.

Далі через $n(y)$ позначимо індикатрису Банаха – функцію, задану на відрізьку $[m, M]$, де $m = \min_{a \leq x \leq b} f(x)$ і $M = \max_{a \leq x \leq b} f(x)$, і значення якої – число коренів рівняння $f(x) = y$. Якщо множина цих коренів нескінченна, то $n(y) = +\infty$. Зрозуміло, що $0 \leq n(y) < +\infty$ для довільного скінченного рівня $f^{-1}(y)$.

Тепер маємо таке твердження.

Теорема 1. Нехай $f: [a, b] \rightarrow R$ – неперервне нульвимірне відображення і множина його скінченних рівнів E скрізь другої категорії на $f([a, b])$. Тоді множина нескінченних рівнів відображення f ніде не щільна.

Доведення. За умовою відображення f нульвимірне і має множину E скінченних рівнів скрізь другої категорії на образі $f([a, b])$. Тому існує скрізь щільна на відрізьку $[a, b]$ скінченна або зліченна послідовність $\{(a_i, b_i)\}$ інтервалів попарно без спільних точок, в кожному з яких f є строго монотонним [4], причому надалі можна вважати, що ніде не щільна замкнена множина $P = [a, b] \setminus \bigcup_i (a_i, b_i) \neq \emptyset$ і в жодному околі кожної точки $x \in P$ відображення f не є монотонним. При цьому точки множини $[a, b] \setminus P$ будемо називати регулярними.

Покажемо тепер, що доповнення $f([a, b]) \setminus E$ є ніде не щільною множиною. Зробимо це від супротивного. Припустимо, що знайдеться відрізок $[c, d] \subset f([a, b])$, на якому множина $f([a, b]) \setminus E$ є скрізь щільною.

Позначимо через F_n множину точок прямої $R = R_y$, кожній з яких відповідає щонайбільше n точок доповнення $[a, b] \setminus P$. Будь-яка множина F_n замкнена на R , оскільки легко довести, що її доповнення відкрите. Зазначимо тут, що точку $a \in [a, b]$ вважатимемо регулярною лише у тому випадку, якщо відображення f у точках a і $b \in [a, b]$ однобічно зростає або спадає. Тоді обидві ці точки слід визнавати за одну. Очевидно маємо $F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_n \subset \dots$.

Оскільки E є множиною скрізь другої категорії на $f([a, b])$ і $\bigcup_n F_n \supset E$, то об'єднання $\bigcup_n F_n$ також скрізь другої категорії на відрізьку $[c, d] \subset f([a, b])$. На підставі цього існує інтервал $\Delta \subset [c, d] \subset f([a, b])$, в якому хоча б одна з

множин F_n є скрізь щільною. Внаслідок замкненості множини F_n звідси маємо $\Delta \subset F_n$.

Нехай точці $y_0 \in \Delta$ відповідає максимально можливе число N точок $\{x_k\} (k=1, 2, \dots, N)$ з доповнення $[a, b] \setminus P$ серед усіх точок інтервалу Δ . Зрозуміло, що $N \leq n$.

Побудуємо далі такі інтервали – околи $U(x_k) (k=1, 2, \dots, N)$ точок $x_k \in [a, b] \setminus P$, щоб образ кожного з них був деяким фіксованим інтервалом $\delta(y_0) \subset \Delta \subset [c, d]$ із центром у точці y_0 і щоб замикання цих околів – відрізки $\overline{U(x_k)} \subset [a, b] \setminus P (k=1, 2, \dots, N)$. Можливість виконання такої побудови легко впливає з відкритості строго монотонних функцій.

За припущенням множина нескінченних рівнів відображення f є скрізь щільною на відрізку $[c, d] \subset f([a, b])$. Отже, існує точка $\tilde{y}$ доповнення $[c, d] \setminus E \subset f([a, b])$ така, що $\tilde{y} \in \delta(y_0) \subset \Delta$.

Розглянемо рівень $f^{-1}(\tilde{y})$ відображення f , який є нескінченною нульвимірною множиною. Тоді маємо $f^{-1}(\tilde{y}) \cap P \neq \emptyset$ і в деякій точці $\tilde{x} \in P$ одержимо $f(\tilde{x}) = \tilde{y}$. Оскільки множина P ніде не щільна і $\tilde{x}$ не міститься в об'єднанні $\bigcup_{k=1}^N \overline{U(x_k)}$, то існує послідовність точок $\{x_m\}, x_m \in [a, b] \setminus P (m=1, 2, \dots)$, яка є збіжною до $\tilde{x}$. За неперервністю відображення f образи цих точок $y_m = f(x_m)$, починаючи з деякого номера m , будуть лежати у середині інтервалу $\delta(y_0)$.

Попереднє свідчить про таке. Якщо y_m – одна з таких точок, то їй має відповідати множина, яка містить принаймні $N+1$ точок з доповнення $[a, b] \setminus P$. Це суперечить визначенню точки y_0 і числа N .

Отримане протиріччя доводить теорему.

Те, що вищедоведена теорема не є вірною без додаткової вимоги про нульвимірність відображення показує приклад [1] відомої канторової функції $\theta(x), x \in [0, 1]$. Будучи сталою на замиканні кожного з суміжних інтервалів до канторової множини P_0 , функція $\theta(x)$ на щільній відкритій підмножині $[0, 1] \setminus P_0$ відрізка $[0, 1]$ є зростаючою, а її множина значень (на цій підмножині) скрізь щільна (і до того ж першої категорії) в $[0, 1]$.

Із встановленого результату маємо такі наслідки.

Теорема 2. Якщо виконуються всі умови теореми 1, то множина злічених рівнів відображення f ніде не щільна.

Теорема 3. За умов теореми 1 множина незлічених рівнів відображення f є ніде не щільною.

Нарешті, якщо взяти замикаання доповнення $f([a,b]) \setminus E$ і розглянути множину скінченних рівнів відображення f , то згідно з теоремою 1 одержимо відкриту скрізь щільну на $f([a,b])$ множину $e \subset E$. Отже, основний результат можна переформулювати так.

Теорема 4. Нехай неперервне нульвимірне відображення $f(x), x \in [a,b]$ має множину $E \subset f([a,b])$ скінченних рівнів скрізь другої категорії. Тоді множина E містить внутрішні точки відносно прямої R на будь-якому інтервалі $(\alpha, \beta) \subset f([a,b])$.

З доведення основної теореми випливає, що на кожному відрізку $[\lambda, \mu] \subset f([a,b])$ існує інтервал $\delta \subset [\lambda, \mu]$, кожній точці якого відповідає точно N точок, причому лише з доповнення $[a,b] \setminus P$. Звідси одержимо таке твердження.

Теорема 5. Якщо неперервне відображення $f: [a,b] \rightarrow R$ нульвимірне з множиною скінченних рівнів скрізь другої категорії, то існує відкрита скрізь щільна на $f([a,b])$ множина G , в кожній компоненті якої його індикатриса Банаха $n(y)$ обмежена.

Отже, якщо неперервна функція ніде не стала на відрізку і множина її скінченних рівнів другої категорії, то ця множина містить внутрішні точки, в околі кожної з яких індикатриса Банаха обмежена.

Висновки

На підставі попереднього для неперервної на відрізку функції, яка ніде не стала, множину її скінченних рівнів з точністю до ніде не щільної множини можна вважати відкритою і скрізь щільною, якщо вона другої категорії.

Список літератури

1. Гелбаум Б. Контрпримеры в анализе / Б. Гелбаум, Дж. Олмстед. – М.: Мир, 1967. – 252с.
2. Куратовский К. Топология: в 2 т. / К. Куратовский. – М.: Мир, 1996.–Т.1.– 595 с.
3. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной / И.П. Натансон. – М.: Наука, 1974.– 480с.
4. Сафонов В.М. Про зліченно-кратні функції / В.М. Сафонов // Аналіз і застосування: зб. праць Ін-ту математики НАН України, 2012. – Т.9, №2. – К.: Ін-т математики НАН України, 2012. – С. 341–346.
5. Трохимчук Ю.Ю. Дифференцирование, внутренние отображения и критерии аналитичности / Ю.Ю. Трохимчук.– К.: Ин-т математики НАН Украины, 2008.– 539 с.

О МНОЖЕСТВЕ КОНЕЧНЫХ УРОВНЕЙ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

В.М. Сафонов, А.М. Нецадим, А.П. Зинькевич

Рассмотрены непрерывные функции одной действительной переменной, которые имеют множество конечных уровней всюду второй категории. Доказано, что в случае нульмерности указанных отображений множество их бесконечных уровней нигде не плотно.

Ключевые слова: *уровень функции, нульмерное отображение, нигде не плотное множество, всюду плотное множество, множество второй категории*

ON THE SET OF THE FINAL LEVEL CONTINUOUS FUNCTIONS

V. Safonov, A. Neshchadym, A. Zinkevych

This paper considers continuous functions of real variable with a set of finite levels of the second category. We proved that in the case of zero-dimensionality, the set of its infinite levels is nowhere-dense.

Keywords: *level of function, zero-dimensional mapping, nowhere-dense set, dense set, set of the second category*

УДК 517.51

ІТЕРАЦІЙНІ МЕТОДИ В ЗАДАЧАХ ПІДВИЩЕННЯ МІЦНОСТІ МАТЕРІАЛІВ

Т.Г.Криворот, асистент
e-mail: tania.krivorot@gmail.com

Досліджено термомеханічні зв'язані процеси, застосовуючи основні рівняння і співвідношення динамічної зв'язаної задачі термомеханіки. Для розв'язку задачі використано апроксимаційні схеми Кранка-Нікольсона за часом в поєднанні з ітераційним процесом, застосовано ітераційний метод і метод скінченних елементів.

Ключові слова: *мікроструктурні перетворення, напружений стан, параметр, рівняння, модель, процес*

Постановка термомеханічної задачі включає: співвідношення Коші, рівняння руху, рівняння теплопровідності, початкові умови, граничні умови термомеханічного навантаження. Імпульсна обробка металу є ефективним методом підвищення міцності, зносостійкості та довговічності металевих елементів системи енергозабезпечення.

Мета досліджень – чисельне визначення мікроструктурних перетворень та напруженого стану при термомеханічному навантаженні.

Матеріали та методика досліджень. Задача є нелінійною і розв'язується чисельно кроковим методом за часом, моделює термічний та силовий фактор дії лазерного опромінення поверхні металевих тіл.