

4. Зубарь В.П. Перспективы применения лезвийного инструмента из сверхтвердых материалов / В.П. Зубарь // Сверхтвердые материалы. – 2014. – №4. – С. 42.

В статье представлены некоторые результаты сравнительного анализа процессов шлифования и лезвийной обработки инструментами на основе плотных модификаций нитрида бора закаленных сталей и чугунов.

Сверхтвердые материалы, лезвийная обработка, инструмент, режимы резания, шлифование, модификации нитридов бора.

The paper presents some results of comparative analysis of the processes of grinding and blade processing tools based on dense modifications of boron nitride hardened steels and cast irons.

Supersolid materials, blade processing, tool, cutting modes, grinding, modifications of nitrides of boron nitride.

УДК 514.18

ПАРАМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ ПЛОСКИХ КРИВИХ ІЗ ЗАКЛАДЕНИМ ПАРАМЕТРОМ ЗМІНИ ЇХ КРИВИНИ

Т.С. Пилипака, кандидат технічних наук

Складено диференціальне рівняння плоскої кривої із закладеним параметром кривини. Завдяки цьому кривину можна збільшувати в задане число раз в кожній точці кривої або збільшувати чи зменшувати на задану величину. Чисельними методами побудовано модифіковані криві. Для окремих випадків отримано рівняння в кінцевому вигляді.

Параметричність, рівняння, плоска крива, кривина.

Постановка проблеми. При виготовленні деталей циліндричної форми згинання листового матеріалу виникає явище часткового їх розгинання після припинення дії деформуючих зусиль [1]. Тому згинати листовий матеріал потрібно не до заданої форми, а до фіктивної із врахуванням того, що після часткового розгинання він набуде потрібної форми. Кривину k кривої вздовж її дуги s описує натуральне рівняння $k=k(s)$. Модифікацією цього рівняння можна впливати на зміну кривини кривої, тобто збільшувати її до фіктивного значення.

© Т.С. Пилипака, 2015

Аналіз останніх досліджень. Упереджене згинання листового матеріалу в циліндричну форму зводиться до знаходження кривої ортогонального перерізу циліндра із заданою закономірністю кривини вздовж дуги. В праці [2] запропоновано ввести сталу величину p , названу коефіцієнтом пружинення. Множенням цього коефіцієнта на натуральне рівняння кривої можна пропорційно збільшити кривину в необхідне число раз. Такий підхід було застосовано при виготовленні конічних деталей і показано, що на коефіцієнт пружинення потрібно множити нормальну складову кривини кола – основи конуса [3]. В загальному випадку згинання торсових поверхонь показано, що на коефіцієнт пружинення потрібно множити тільки нормальну складову кривої на поверхні торса [4, 5]. Моделюванню плоских кривих із заданою закономірністю розподілу кривини присвячені праці [6, 7].

Мета досліджень. Розробити математичну модель конструювання плоских кривих із можливістю їх модифікації шляхом заданого закону розподілу кривини.

Результати досліджень. Відомі формули переходу від натурального рівняння $k=k(s)$ до параметричних, тобто до координатного запису. Якщо ми збільшимо кривину вихідної кривої у p раз, тобто помножимо натуральне рівняння на певний коефіцієнт p , то ці формули набувають вигляду:

$$x = \int \cos\left(p \int k ds\right) ds; \quad y = \int \sin\left(p \int k ds\right) ds. \quad (1)$$

Використовуючи рівняння (1), можна здійснити перетворення будь-якої плоскої кривої, заданої натуральним рівнянням $k=k(s)$ за допомогою чисельних методів. Проте є і такі випадки, коли рівняння (1) можна проінтегрувати. Найпростіший випадок – вихідною кривою є коло. Перетвореною кривою теж буде коло із іншою кривиною. Коло – не єдина крива, яка після перетворення залишається собою, змінюючи при цьому тільки внутрішній параметр. Наприклад, натуральне рівняння евольвенти кола має вигляд:

$$k = \frac{1}{\sqrt{2as}}, \quad (2)$$

де: a – радіус вихідного кола, стала величина.

Множенням рівняння (2) на сталу p отримаємо натуральне рівняння перетвореної кривої, яка теж є евольвентою кола:

$$k_{\pi} = \frac{p}{\sqrt{2as}} = \frac{1}{\sqrt{2 \frac{a}{p^2} s}} = \frac{1}{\sqrt{2a_{\pi}s}}, \quad (3)$$

де: $a_{\pi}=a/p^2$ – вихідне коло для одержаної модифікованої евольвенти.

Із (3) можна зробити висновок: зменшення кола вихідної евольвенти у p^2 раз веде до зростання кривини нової евольвенти в кожній відповідній точці у p раз.

Підставивши натуральне рівняння (2) у формули (1), після інтегрування одержимо параметричні рівняння евольвенти, кривину якої можна змінювати за допомогою значення сталої p :

$$\begin{aligned} x &= \frac{a}{p^2} \cos\left(\sqrt{\frac{2}{as}} ps\right) + \frac{\sqrt{2as}}{p} \sin\left(\sqrt{\frac{2}{as}} ps\right); \\ y &= \frac{a}{p^2} \sin\left(\sqrt{\frac{2}{as}} ps\right) - \frac{\sqrt{2as}}{p} \cos\left(\sqrt{\frac{2}{as}} ps\right). \end{aligned} \quad (4)$$

Криві, що допускають подібне перетворення, можна розпізнати. Для них множник p не змінює саме натуральне рівняння, а лише змінює певну сталу величину. Наприклад, натуральне рівняння логарифмічної спіралі має вигляд:

$$k = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{s}, \quad \text{звідки} \quad k_n = \frac{p \operatorname{tg} \alpha}{s} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_n}{s}, \quad (5)$$

де: α і α_n – кути, під яким перетинає спіраль радіус-вектор, що виходить із початку координат, до і після перетворення. Отже збільшення кривини кожної точки логарифмічної спіралі в p раз дає нову логарифмічну спіраль із зміненним кутом α_n , що знаходиться із виразу:

$$\alpha_n = \operatorname{Arctg}(p \operatorname{tg} \alpha). \quad (6)$$

Параметричні рівняння модифікованої за формулами (1) логарифмічної спіралі після інтегрування набувають вигляду:

$$\begin{aligned} x &= \frac{s}{1+p^2} [\cos(p \ln s) + p \sin(p \ln s)]; \\ y &= \frac{s}{1+p^2} [\sin(p \ln s) - p \cos(p \ln s)]. \end{aligned} \quad (7)$$

Для певного класу кривих перетворення їх натурального рівняння збільшенням кривини у p раз призводить до того, що сама крива змінюється і параметричних рівнянь у кінцевому вигляді не існує. Прикладом може служити ланцюгова лінія, натуральне рівняння якої має вигляд:

$$k = \frac{a}{a^2 + s^2}, \quad (8)$$

де: a – стала величина.

Якщо підставити (8) у (1), то вирази (1) не можуть бути проінтегровані при довільному значенні сталої p . Зокрема, при $p=1$ інтегрування можливе і воно дає параметричні рівняння вихідної кривої – ланцюгової лінії:

$$x = a \cdot \text{Arcsinh}\left(\frac{s}{a}\right); \quad y = \sqrt{a^2 + s^2}. \quad (9)$$

Цікаво те, що при заміні p на ціле число (2, 3 і т.д.) система символної математики програмного продукту „*Mathematica 5*” інтегрує вирази (1). Наприклад, для $p=2$ параметричні рівняння перетвореної ланцюгової лінії будуть:

$$x = 2a \text{Arctg} \frac{s}{a} - s; \quad y = a \ln\left(1 + \frac{s^2}{a^2}\right). \quad (10)$$

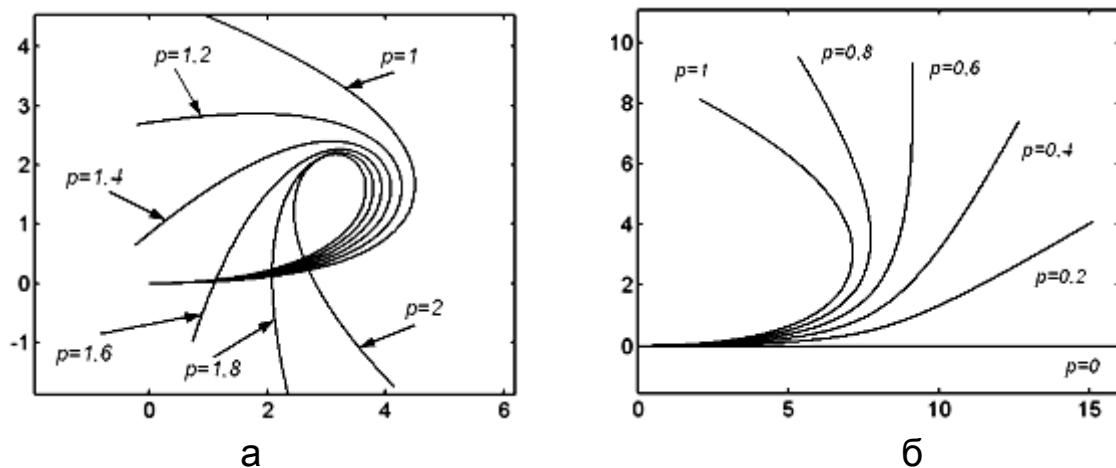


Рис. 1. Перетворення ланцюгової лінії множенням її натурального рівняння на сталу p : а) $2 \geq p \geq 1$; б) $1 \geq p \geq 0$.

Для дробових значень сталої p параметричних рівнянь в кінцевому вигляді не існує, тому криві потрібно будувати за допомогою чисельних методів. На рис. 1 побудовано перетворені криві для деяких цілих та дробових значень p .

Криві для $p=1$ (ланцюгова лінія) і для $p=2$ (модифікована крива із вдвічі більшою кривиною) побудовані за рівняннями (9) і (10) відповідно, для дробових значень p – чисельними методами. Для інших цілих значень сталої p теж можна знайти параметричні рівняння, щоправда по мірі збільшення чисельного значення p вони стають більш громіздкими.

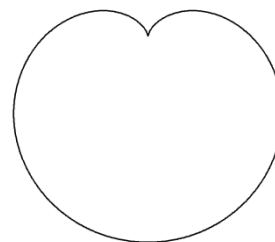
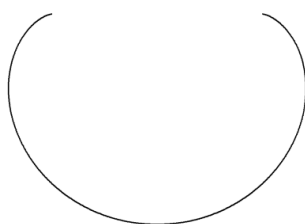
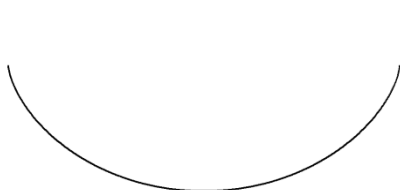
Подібно до ланцюгової лінії можна модифікувати циклоїду і отримувати параметричні рівняння тільки для цілих значень p . Можна показати, що при $p=3$ вітка циклоїди перетворюється у кардіоїду. В табл. 1 наведено узагальнене натуральне рівняння і відповідні параметричні рівняння для різних значень p .

Порівнявши модифіковане натуральне рівняння циклоїди при $p=3$ $k = 3/\sqrt{16a^2 - s^2}$, де a – стала величина, з натуральним рівнян-

ням кардіоїди $k = 3/\sqrt{64a_k^2 - s^2}$, бачимо, що вони ідентичні при співвідношенні сталих $a_k = a/2$. Відомо що схема утворення цих кривих подібна: обидві криві є траєкторією точки кола, яке котиться без ковзання по прямій лінії (циклоїда) і по колу цього ж радіуса (кардіоїда). З одержаного співвідношення $a_k = a/2$ сформулюємо наступну властивість, яка об'єднує циклоїду і кардіоїду в кінематичному плані.

1. Перетворення циклоїди збільшенням її кривини.

Модифікація циклоїди множенням її натурального рівняння на p :		$k = \frac{p}{\sqrt{16a^2 - s^2}}$
$p=1$ (циклоїда)	$p=2$	$p=3$ (кардіоїда)



$$x = \frac{s}{8a} \sqrt{16a^2 - s^2} + 2\text{Arcsin} \frac{s}{4a};$$

$$y = \frac{s^2}{8a}.$$

$$x = \frac{s}{24a^2} (24a^2 - s^2);$$

$$y = -\frac{(16a^2 - s^2)^{3/2}}{24a^2}.$$

$$x = \frac{s(16a^2 - s^2)^{3/2}}{64a^3};$$

$$y = \frac{s^2}{64a^3} (24a^2 - s^2).$$

Якщо при утворенні циклоїди взяти коло радіуса r , а при утворенні кардіоїди – коло радіуса $r/2$, то при відомій схемі побудови цих кривих траєкторією точки першого кола буде циклоїда, а другого – кардіоїда, причому довжини віток цих кривих будуть рівними, а кривина кардіоїди в кожній її точці буде втричі більшою кривини циклоїди у відповідній точці.

Перетворення плоскої кривої можна здійснювати збільшенням або зменшенням кривини в кожній її точці на сталу величину k_0 . Таке перетворення опишеться натуральним рівнянням:

$$k_{\pi} = k(s) + k_0. \quad (11)$$

При переході від натурального рівняння (11) до параметричних отримаємо:

$$x = \int \cos\left(\int k ds + k_0 s\right) ds; \quad y = \int \sin\left(\int k ds + k_0 s\right) ds. \quad (12)$$

В рівняннях (12) можна розписати суму синуса і косинуса, однак ці рівняння не можуть бути проінтегровані до кінця ні для яких

залежностей $k=k(s)$ за виключенням хіба що $k=const$. Отже інтегрування рівнянь (12) необхідно здійснювати чисельними методами. На рис. 2 показано перетворення циклоїди збільшенням та зменшенням її кривини на сталу величину k_0 . Всі криві симетричні і починаються із однієї точки із спільною дотичною.

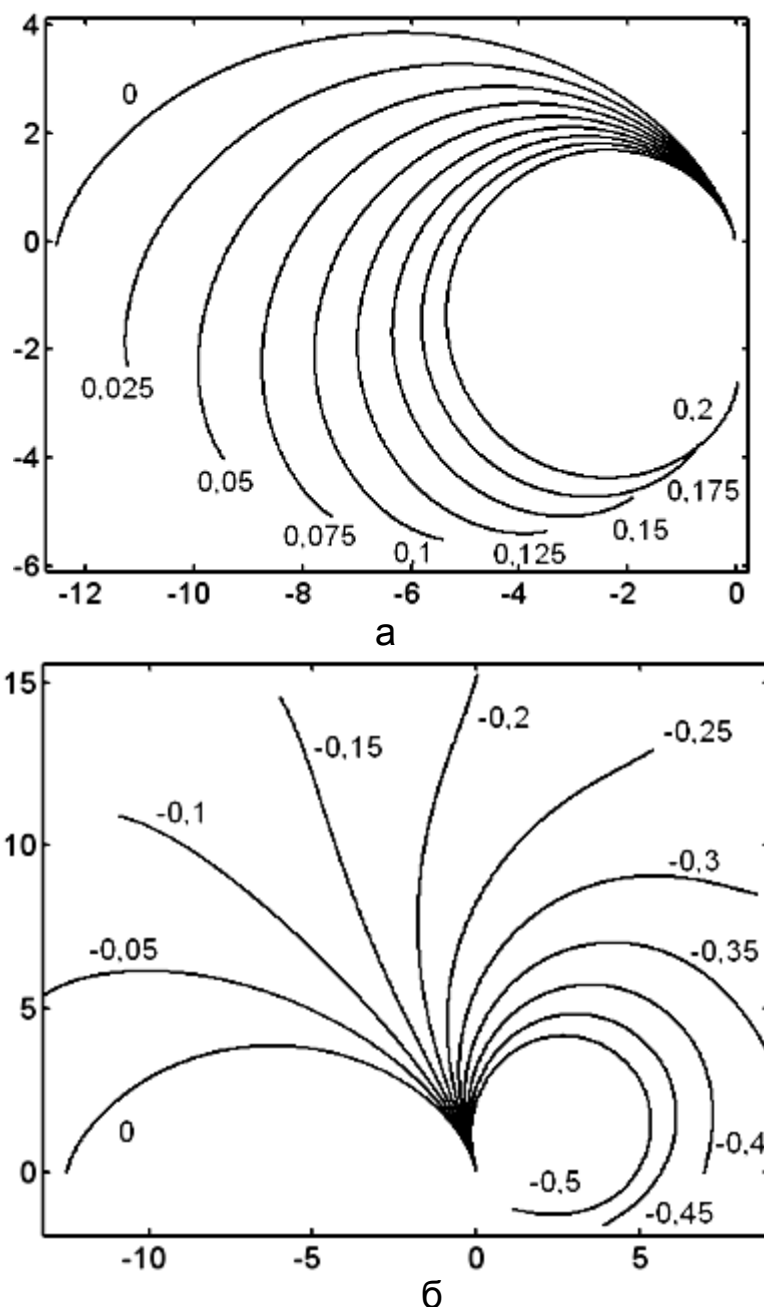


Рис. 2. Перетворення циклоїди збільшенням та зменшенням її кривини на сталу величину k_0 : а) зростання кривини кожної наступної кривої на $\Delta k_0=0,025$; б) зменшення кривини кожної наступної кривої на $\Delta k_0=0,05$.

Зробимо аналогічне перетворення ланцюгової лінії. Підставимо (8) у (12) і після часткового інтегрування отримаємо параметричні рівняння вказаного перетворення:

$$\begin{aligned} x &= a \int \frac{\cos(k_0 s)}{\sqrt{a^2 + s^2}} ds - \int \frac{s \cdot \sin(k_0 s)}{\sqrt{a^2 + s^2}} ds ; \\ y &= a \int \frac{\sin(k_0 s)}{\sqrt{a^2 + s^2}} ds + \int \frac{s \cdot \cos(k_0 s)}{\sqrt{a^2 + s^2}} ds . \end{aligned} \quad (13)$$

Поступове перетворення ланцюгової лінії при збільшенні та зменшенні її кривини з кроком 0,1 показано на рис. 2 і рис. 3.

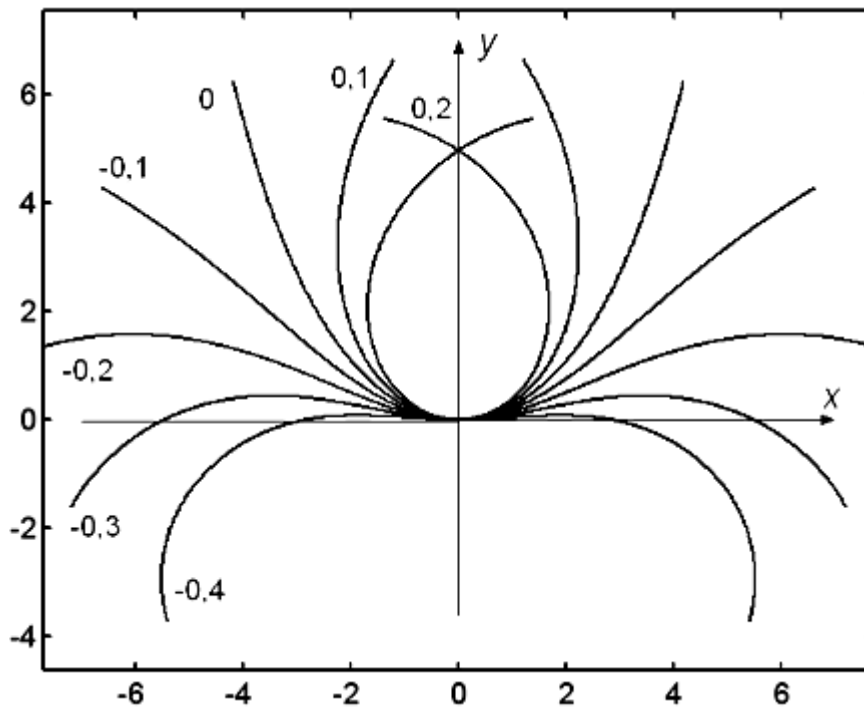


Рис. 3. Перетворення ланцюгової лінії збільшенням та зменшенням її кривини з кроком 0,1.

Особливістю перетворення кривої збільшенням або зменшенням її кривини на сталу величину є те, що у перетвореної кривої можуть бути точки перегину при їх відсутності у вихідної кривої.

Висновок. При збільшенні або зменшенні кривини кривої у сталу число раз деякі криві не змінюють своєї суті, назви і рівнянь (наприклад, коло, евольвента кола, логарифмічна спіраль), а тільки форму. Інша група кривих при такому перетворенні натурального рівняння трансформується у інші криві (наприклад, ланцюгова лінія, циклоїда). При збільшенні або зменшенні кривини кривої на сталу величину вона перетворюється у іншу криву (за виключенням кола), причому характерною ознакою такого перетворення може бути наявність точок перегину в утвореної кривої при їх відсутності у вихідної.

Список літератури

1. Лысов М.И. Теория и расчет процессов изготовления деталей методами гибки / М.И. Лысов. – М.: Машиностроение, 1996. – 236 с.
2. Пилипака С.Ф. Визначення фіктивного контуру деталі при згинанні листового матеріалу в циліндричну поверхню заданої форми із врахуванням пружинення металу / С.Ф. Пилипака, В.М. Несвідомін, Т.С. Пилипака // Праці Таврійської державної агротехнічної академії. – Мелітополь: ТДАТА, 2005. – Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Т. 30. – С. 67–73.
3. Пилипака С.Ф. Згинання конічних поверхонь із листового матеріалу із врахуванням пружинення металу / С.Ф. Пилипака, В.М. Несвідомін, Т.С. Пилипака // Збірник наукових праць Київського національного університету технологій та дизайну (спецвипуск). – К.: ДОП КНУТД, 2005. – С. 159–162.
4. Пилипака Т.С. Дослідження взаємозв'язку між кривиною і нормальною кривиною плоских перерізів торса однакового нахилу твірних при його згинанні / Т.С. Пилипака // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. – Мелітополь: ТДАТУ, 2008. – Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Т. 40. – С. 145–151.
5. Несвідомін В.М. Дослідження взаємозв'язку між повною та нормальною кривиною ліній кривини торса при його згинанні / В.М. Несвідомін, Т.С. Пилипака // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2009. – Вип. 81. – С. 82–87.
6. Борисенко В.Д. Геометричне моделювання плоского криволінійного обводу із застосуванням кубічного закону розподілу його кривини / В.Д. Борисенко, С.А. Устенко, В.С. Комар // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2008. – Вип. 79. – С. 52–57.
7. Устенко С.А. Моделювання кривої із застосуванням кубічного закону розподілу її кривини / С.А. Устенко // Вестник Херсонского национального технического университета. – Херсон: ХНТУ, 2008. – Вып. 2 (31). – С. 480–484.

Составлены дифференциальные уравнения плоской кривой с заданным параметром кривизны. Благодаря этому кривизну можно увеличить в заданное количество раз в каждой точке кривой или уменьшить и уменьшить на заданную величину. Численным методом построено модифицированные кривые. Для отдельных случаев получены уравнения в конечном виде.

Параметричность, уравнение, плоская кривая, кривизна.

The differential equation of a plane curve with the included parametre of curvature is made. Thanks to it curvature can be increased in the set number of times in each point of a curve or to increase or reduce by a specified value. Numerical methods build the inoculated curves. For separate cases the equations in the final form are gained.

Parametric, equations, plane curve, curvature.