

ЛОГІЧНА АЛГЕБРА ТА ОСНОВИ МИСЛЕННЯ ЛЮДИНИ

Т. Г. Криворот, асистент
e-mail: nni.elektrik@gmail.com

Анотація. Розглянуто булеву та предикатну моделі векторних логічних просторів. Проаналізовано інтерпретацію елементів та операцій над ними для предикатної моделі у вигляді гіперкубів відповідної розмірності, а також їх інтерпретацію як природномовних структур, що дає змогу використовувати ці моделі логічних просторів як моделі подання знань.

Ключові слова: логічна алгебра, предикатна модель, булева модель, інформаційні технології, логічний скаляр, логічний вектор, формалізація

Сучасна епоха характеризується бурхливим розвитком та застосуванням найновітніших інформаційних технологій. Але введення інформації в комп'ютер залишається незмінним. Відсутні формалізовані підходи до подання знань і методи моделювання знань.

Пошук методів формалізації висловлювань природної мови може відкрити шляхи для вдосконалення роботи діалогових людино-машинних систем. Багато сучасних досліджень присвячено розробці математичного апарату для формального опису природної мови. За основу для його розробки можна взяти алгебру скінченних предикатів, мовою якої можна описати будь-який закон інтелекту, що реалізується на ЕОМ. Унаслідок цього, найбільш перспективним є використання такого розділу математики, як логічний аналіз.

Значний внесок у розв'язання задачі формалізації природної мови зробили Т. Віноград, Є. В. Попов, В. Ш. Рубашкін, Ю. П. Шабанов-Кушнарєнко, Н. В. Шаронова, М. Ф. Бондаренко, І. Б. Сіроджа та інші.

Мета досліджень – обґрунтування та перевірка математичного апарату векторних логічних просторів як інструментальних засобів для опрацювання інформації, що зберігається в базах даних, аналіз словосполучень і речень природної мови для дослідження можливості створення інтерфейсів у комп'ютерних системах підтримки прийняття рішень.

Матеріали та методика досліджень. Дослідження математичних моделей булевих та предикатних векторних логічних просторів як апарату формалізації знань, поданих як природномовні структури. Аналіз можливих алгебраїчних інтерпретацій булевої та предикатної моделей векторних логічних просторів.

Результати досліджень. Важливі результати можна отримати, якщо провести аналогію між лінійною алгеброю, засобами якої

формалізуються різноманітні системи у вигляді математичних моделей, і логічною алгеброю, що є основою мислення людини.

Математичною основою автоматичного розуміння природномовних висловлювань є алгебра скінченних предикатів, розширенням якої є апарат векторних логічних просторів.

Можна розглядати математичний апарат логічних матриць, розроблений на основі алгебри скінченних предикатів, подібно до апарату матриць у лінійній алгебрі. Булево логічне поле, що містить лише два елементи $G=\{0, 1\}$, та предикатне логічне поле, елементами якого є всі n -місні скінченні предикати, задані на декартовому добутку $K=K_1 \times \dots \times K_n$, $|K_i|=k_i$. Кожний елемент такого поля можна подати як однорівневий перемикальний ланцюг із n входами та одним виходом, що реалізує відповідний логічному скаляру предикат. Операціям диз'юнкції, кон'юнкції та заперечення логічних скалярів у цьому випадку відповідають дворівневі перемикальні ланцюги, в яких другий рівень реалізує елемент роз'єднання, збіжності та інвертор відповідно.

З іншого боку, кожен елемент предикатного скалярного поля можна подати як гіперкуб розмірності n . Таке подання для тримісного предикату $R(x, y, z)$ над декартовим добутком $K=\{0, 1\}^3$, де кожній вершині відповідає значення предиката за певним набором значень аргументів x, y, z , що створюють цю вершину. Одиничному елементу відповідає гіперкуб, усі вершини якого мають значення одиниці, а нульовому елементу – гіперкуб, усі вершини якого дорівнюють нулю. Під час проведення операцій диз'юнкції, кон'юнкції та заперечення скалярів, ці операції проводяться над відповідними вершинами гіперкубів, якими подані предикати, що беруть участь в операціях.

Таку інтерпретацію елементів предикатного скалярного логічного поля можна розуміти як геометричну інтерпретацію коректуючих кодів. При цьому кожному n -мірному простору Хеммінга відповідає елемент скалярного логічного поля скінченних предикатів арності n , що поданий гіперкубом, у якого лише єдиній вершині відповідає одиниця, а решті вершин – нулі.

Поняття логічної матриці, а також пов'язані з ним поняття квадратної, порядку квадратної, одиничної, нульової, блочної логічних матриць, логічного рядка, довжини рядка, логічного стовпця, висоти стовпця, вводяться відповідно до подібних понять у лінійній алгебрі. Основними операціями над логічними матрицями є логічний добуток матриці на скаляр або скаляра на матрицю, диз'юнкція, кон'юнкція, заперечення та добуток логічних матриць.

Поняття логічного добутку скаляра на матрицю або матриці на скаляр та добутку логічних матриць подібне до відповідних понять лінійної алгебри. Диз'юнкцією (кон'юнкцією) двох логічних матриць A і B над деяким скалярним полем, що мають однакову кількість рядків та стовпців, є матриця, що має таку саму кількість рядків і стовпців та елементи якої дорівнюють диз'юнкціям (кон'юнкціям) відповідних елементів матриць A і B . Запереченням логічної матриці A є матриця тієї самої розмірності, елементи

якої дорівнюють запереченням відповідних елементів матриці A . Для логічних матриць мають місце такі властивості: $\alpha A = A\alpha$; $1 \cdot A = A$; $0 \cdot A = 0$; $\alpha \cdot 0 = 0$; $\alpha (\beta A) = (\alpha\beta) A$; $A \vee B = B \vee A$, $A \wedge B = B \wedge A$; $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$, $A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$; $\alpha (A \vee B) = \alpha A \vee \alpha B$; $(\alpha \vee \beta) A = \alpha A \vee \beta A$; $\alpha (A \wedge B) = (\alpha A) \wedge B$; $(A \vee B) \wedge C = A \wedge C \vee B \wedge C$, $A \wedge B \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$; $A \vee A \wedge B = A$, $A \wedge (A \vee B) = A$; $A \vee A = A$, $A \wedge A = A$; $A \vee 0 = 0 \vee A = A$, $A \wedge 0 = 0 \wedge A = 0$; $A \wedge \bar{A} = 0$; $\bar{\bar{A}} = A$; $A \vee \bar{A} = 1$; $A \vee B \wedge \bar{B} = A$, $A \wedge (B \vee \bar{B}) = A$; $\overline{A \vee B} = \bar{A} \wedge \bar{B}$, $\overline{A \wedge B} = \bar{A} \vee \bar{B}$; $\alpha (AB) = (\alpha A) B$; $A (\alpha B) = (A\alpha) B$; $(AB) \alpha = A (B\alpha)$; $(A \vee B) C = AC \vee BC$, $C (A \vee B) = CA \vee CB$; $A (BC) = (AB) C$.

Операції транспонування та обернення логічних матриць, а також пов'язані з ними поняття симетричної, перестановочної та зворотної логічних матриць, визначаються подібно до відповідних понять у лінійній алгебрі. У логічній алгебрі мають місце такі правила транспонування: $(\alpha A \vee \beta B)^T = \alpha A^T \vee \beta B^T$; $\overline{A^T} = \bar{A}^T$; $(AB)^T = B^T A^T$; $(AB)^T = B^T A^T$. Квадратна логічна матриця називається ортогональною, якщо диз'юнкція всіх елементів кожного її рядка та диз'юнкція всіх елементів кожного її стовпця дорівнюють тотожній одиниці, а кон'юнкція будь-яких двох елементів у кожному її рядку і кон'юнкція будь-яких двох елементів у кожному її стовпці дорівнюють тотожному нулю.

Для того, щоб для квадратних логічних матриць A і B над полем логічних скалярів $G = \{0, 1\}$ або полем скінченних предикатів будь-якої арності виконувалося рівняння $AB = E$, необхідно та достатньо, щоб A і B були ортогональними та підкорялись умові $B = A^T$.

Булева модель: як логічні вектори розглядається множина конститuent одиниці по t змінних. У ролі скалярного поля виступає двохелементна множина $G = \{0, 1\}$. Предикатна модель: за множину логічних векторів розглядається система скінченних предикатів арності t на декартовому добутку $K = K_1 \times \dots \times K_t$, $|K_i| = k_i$, за поле логічних скалярів виступає будь-яка система всіх скінченних предикатів арності $n < m$.

Розглянемо поле логічних скалярів, що є множиною n -містних предикатів $P(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$, $i_t \neq i_s$, $t, s = 1, \dots, n$, де множина індексів $\{i_1, \dots, i_n\}$ є підмножиною індексів $\{1, \dots, m\}$. У зв'язку з тим, що всі простори t -містних предикатів, аргументами предикатів для скалярного поля яких виступають всілякі підмножини $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_n}\}$ множини $\{x_1, \dots, x_m\}$, улаштовані однаково, з точки зору операції добутку вектора на скаляр, будемо вважати, що предикати-скаляри задані на множині перших n елементів множини $\{x_1, \dots, x_m\}$, тобто являють собою n -містні предикати $P(x_1, \dots, x_n)$. Операція добутку вектора на скаляр у предикатних просторах здійснюватиметься за таким правилом: $(P \cdot Q)(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_m) = P(x_1, \dots, x_n) \wedge Q(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_m)$.

Логічні вектори предикатного простору також можна подавати у вигляді однорівневих перемикальних ланцюгів з t входами та одним виходом, що реалізують відповідні до цих векторів скінченні предикати. У цьому випадку, операції добутку вектора на скаляр відповідає дворівневий перемикальний ланцюг, в якому другий рівень реалізує

елемент збіжності. Випадок добутку скаляра у вигляді двомісного предиката $Q(x, y)$ на декартовому добутку $K^2 = \{0, 1\}^2$ на вектор у вигляді тримісного предиката $R(x, y, z)$ на декартовому добутку $K^3 = \{0, 1\}^3$, подано на рис. 2.

Поняття лінійної комбінації логічних векторів подібне до цього поняття у лінійній алгебрі. Якщо логічний вектор I можна подати як лінійну комбінацію декількох інших векторів, то I залежить від цих векторів. У протилежному випадку він від них не залежить. Система логічних векторів є незалежною, якщо кожний з її векторів не залежить від решти векторів цієї системи. Поняття базису, розкладу векторів за базисом та розмірності логічного простору подібні до відповідних понять у лінійній алгебрі. Але не в усіх логічних просторах має місце єдність розкладу векторів за базисом. Простори, в яких ця єдність має місце, називаються досконалими, решта – недосконалими. При диз'юнкції або добутку на скаляр векторів будь-якого логічного простору координати цих векторів відносно заданого базису диз'юнктуються або помножуються на цей скаляр. Поняття ізоморфних логічних просторів, їх властивості, а також механізм побудови матриць переходу від одного базису до іншого й зворотного переходу також повністю подібні до цих процедур у лінійній алгебрі.

Отже, у будь-якому логічному просторі існує ортогональна матриця A переходу до нового базису й ортогональна матриця B зворотного переходу та $B = A^T$. Наслідком з цього є той чинник, що в досконалому логічному просторі існує єдина матриця переходу A і єдина матриця зворотного переходу B і вони ортогональні та $B = A^T$. Унаслідок ізоморфізму алгебри ідей і алгебри булевих функцій, у булевому просторі існує єдиний розклад кожного його вектора за базисом, тобто повний булевий простір є досконалим. Повний простір t -місних предикатів над скалярним полем n -місних предикатів, $n < t$, теж є досконалим.

Складемо множину X із всіляких наборів аргументів $x_{n+1}, \dots, x_m$: $X = \{ (x_{n+1}, \dots, x_m), x_i \in K_i, n+1 \leq i \leq m \}$. Для стислості запису елементи X позначимо через v . За базисні беруться предикати, що мають вигляд

$$Q_v(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_m) = \begin{cases} 1, & (x_{n+1}, \dots, x_m) = v \\ 0, & (x_{n+1}, \dots, x_m) \neq v, v \in X, \end{cases} \quad (1)$$

тобто в базисному гіперкубі всі вершини, в яких зафіксовано значення останніх $(t-n)$ змінних, дорівнюють одиниці, а решта – нулю. Індексом v при цьому для базисного вектора є набір зафіксованих значень змінних $(x_{n+1}, \dots, x_m)$. Далі розглянуто будь-який вектор $I(x_1, \dots, x_m) \in L$. Його можна подати у вигляді такої лінійної комбінації базисних векторів:

$$I(x_1, \dots, x_m) = \bigvee_{v \in X} I(x_1, \dots, x_n, v) Q_v(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_m), \quad (2)$$

де $I(x_1, \dots, x_n, v)$ є n -місним предикатом, тобто елементом $P_v(x_1, \dots, x_n)$ скалярного поля G . Таким чином, рівняння (2) набуває вигляду

$$I(x_1, \dots, x_m) = \bigvee_{v \in X} P_v(x_1, \dots, x_n) Q_v(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_m), \quad (3)$$

що є розкладом вектора I за побудованим описаним вище базисом. Очевидно, що розклад будь-якого вектора за цим базисом є єдиним.

Слід відзначити, що у випадку подання векторів простору t -місних скінченних предикатів як просторів Хеммінга, якщо позначити предикати відповідного t -мірного коду та коду, що перекручений завадою, через Q_1 і Q_2 відповідно, та врахувати, що для виявлення r -кратної та виправлення s -кратної помилок відстань за Хеммінгом $d=1+r+s$, $r \geq s$, можна стверджувати, що вектор $Q=Q_1 \vee Q_2$ у побудованому описаному таким чином базисі повинен мати дві, й лише дві, координати, що не дорівнюють нулю, тобто арність предикатів, що складають скалярне поле, дорівнює $n=d-1$, тобто $n=r+s$. Розмірність повного предикатного логічного простору знаходиться за формулою $p=k_{n+1}k_{n+2} \dots \cdot k_m$, а у випадку $|K_1|= \dots = |K_m|=k$ – за формулою $p=k^{m-n}$. Розмірність повного булевого простору дорівнює $p=t$.

Кон'юнкцією (запереченням) логічних векторів повного логічного простору є вектор цього самого простору, координати якого дорівнюють кон'юнкції (запереченню) відповідних координат векторів, що беруть участь у визначеній операції. Доведено, що кон'юнкція та заперечення логічних векторів не залежать від вибору базису. Внаслідок цього, під час проведення цих операцій, над векторами аналогічні операції проводитимуться над відповідними вершинами гіперкубів. Для векторів досконалих логічних просторів мають місце такі властивості: $I \vee g = g \vee I$, $I \wedge g = g \wedge I$; $I \vee I = I$, $I \wedge I = I$; $(I \vee g) \vee h = I \vee (g \vee h)$, $(I \wedge g) \wedge h = I \wedge (g \wedge h)$; $(I \vee g) \wedge h = I \vee (g \wedge h)$, $I \vee (g \vee h) = (I \vee g) \vee h$; $I \wedge (g \wedge h) = (I \wedge g) \wedge h$; $I \vee \bar{h} = \bar{h}$, $I \wedge \bar{h} = \bar{h}$; $\bar{I} = I$; $I \vee \bar{I} = 1$; $I \bar{I} = 0$; $\bar{0} = 1$; $\bar{1} = 0$. Враховуючи ці властивості, множину логічних векторів можна розглядати за логічне поле. Доведено, що для будь-якого базису досконалого логічного простору кон'юнкція будь-яких базисних векторів дорівнює нульовому вектору.

Висновки

Розглянуто можливості алгебраїчної інтерпретації розроблених моделей векторних логічних просторів. Показано, що логічна алгебра є абстрактним еквівалентом таких алгебр як алгебра двійкових кодів, алгебра булевих функцій, алгебра множин, алгебра ідей, реляційна алгебра, алгебра скінченних предикатів будь-якого порядку, алгебра предикатних операцій. Показано взаємнооднозначну відповідність між елементами цих алгебр при розгляді їх як логічних. Цей результат є важливим, оскільки, незалежно від вигляду, в якому подається вхідна інформація, її можна опрацьовувати засобами логічної алгебри і подавати вихідний результат також як формалізований запис елементів логічної алгебри.

Список літератури

1. Бардачов Ю. М. Дискретна математика : підруч. / Ю. М. Бардачов, Н. А. Соколова, В. Є. Ходаков ; за ред. В. Є. Ходакова. – К. : Вища школа, 2002. – 287 с.

2. Михайленко В. М. Дискретна математика : підруч. / В. М. Михайленко, Н. Д. Федоренко, В. В. Демченко. – К. : Вид-во Європейського ун-ту, 2003. – 319 с.
3. Бондаренко М. Ф. Комп'ютерна дискретна математика : підруч. для студ. ВНЗ, які навчаються за напрямом "Комп'ютерні науки" / М. Ф. Бондаренко, Н. В. Білоус, А. Г. Руткас. – Х. : Компанія СМІТ, 2004. – 480 с.
4. Акимов О. Е. Дискретная математика // Логика, группы, графы. – 2-е изд., доп. / О. Е. Акимов. – М. : Лаборатория Базовых Знаний, 2001. – 376 с.
5. Луцький Г. М. Основи дискретної математики : навч. посіб. / Г. М. Луцький, С. Л. Кривий, М. К. Печурін. – К. : ІСДО, 1995, – 252 с.
6. Грей П. Логика, алгебра и базы данных / П. Грей ; пер. с англ. Х. И. Килова, Г. Е. Минца. – М. : Машиностроение, 1989. – 368 с.
7. Мендельсон Е. Введение в математическую логику / Е. Мендельсон ; пер. с англ. Ф. А. Кабакова. – 2-е изд., испр. – М. : Мир, 1985. – 307 с.
8. Новиков П. С. Элементы математической логики // М. : Наука, 1973. – 399 с.

ЛОГИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА И ОСНОВЫ МЫШЛЕНИЯ ЧЕЛОВЕКА

Т. Г. Криворот

Аннотация. Рассмотрены булева и предикатная модели векторных логических пространств. Проанализирована интерпретация элементов и операций над ними для предикатных моделей в виде гиперкубов соответствующей размерности, а также их интерпретация как естественных языковых структур, что позволяет использовать эти модели логических пространств как модели представления знаний.

Ключевые слова: логическая алгебра, предикатная модель, булева модель, информационные технологии, логический скаляр, логический вектор, формализация

LOGICAL ALGEBRA AND BASIS OF THINKING MAN

T. Kryvorot

Annotation. The article describes the boolean model and predicate logic vector spaces. Analyzed the interpretation of the elements and operations on them for predicative models in the form of appropriate dimension hypercubes and their interpretation as estestvennoyazykovykh structures that allows the use of these spaces as a logical model of knowledge representation model.

Key words: logic algebra, predicate model, boolean model, information technology, a logical scalar, vector logic, formalization