

УДОСКОНАЛЕННЯ АЛГОРИТМУ ВИЗНАЧЕННЯ ПОПРАВКИ ЗА СПОТВОРЕННЯ ПЛОЩІ ГЕОПРОСТОРОВИХ ОБ'ЄКТІВ В ГЕОДЕЗИЧНИХ ПРОЄКЦІЯХ

С. Г. РАДОВ,

кандидат технічних наук, доцент

E-mail: s.radov@chdtu.edu.ua

<https://orcid.org/0009-0003-5721-996X>

С. В. РОТТЕ,

кандидат технічних наук, доцент

E-mail: s.rotte@chdtu.edu.ua

<https://orcid.org/0000-0003-1281-1241>

А. В. ВОЛОНТИР,

старший викладач

E-mail: a.volontyr@chdtu.edu.ua

<https://orcid.org/0000-0001-5609-4569>

В. В. ЛИТВИН,

асистент

E-mail: litvin_valyav@ukr.net

<https://orcid.org/0009-0002-5490-0859>

П. О. СТАНЬКО,

асистент

E-mail: p.stanko@chdtu.edu.ua

<https://orcid.org/0009-0001-6924-0008>

Черкаський державний технологічний університет

Анотація. Площа, як один з основних геометричних параметрів земельних ділянок, є важливим фактором у землеустрої, земельному кадастрі, стягненні плати за землю тощо. Геодезична площа має визначатися на поверхні референц-еліпсоїда, але в інженерній практиці площа обчислюється за координатами поворотних точок в проєкції Гаусса-Крюгера. Вплив проєкції наближено враховується введенням поправки до обчисленого значення площі за прямокутними координатами. При цьому геодезична площа може суттєво відрізнятися від її наближеного значення.

Не існує точних (кінцевих) формул для обчислення площ довільних ділянок поверхні еліпсоїду за геодезичними координатами поворотних точок. Тому найбільш точні значення геодезичних площ геопросторових об'єктів визначаються

числовими методами, в тому числі у геоінформаційних системах. Простіший спосіб визначення неспотворених площ земельних ділянок полягає у використанні рівновеликих геодезичних проєкцій.

В дослідженні використані проєкції Сансона, Гаусса-Крюгера та Кассіні. Для проєкцій Гаусса-Крюгера та Кассіні наведені алгоритми визначення поправок за ординатою центра тяжіння ділянки та за ординатами усіх поворотних точок. Аналіз точності запропонованих алгоритмів проведений з використанням методу математичного моделювання.

Ключові слова: геодезична площа, геодезичні проєкції, спотворення площ, поправка до обчисленої площі.

Постановка проблеми

Про спотворення площ в картографічних проєкціях відомо з давніх часів. Одним із основних способів визначення неспотворених площ є використання рівновеликих проєкцій. Але найбільш ефективними при топографо-геодезичних роботах є рівнокутні проєкції, з яких основною для використання в Україні з початку двадцятого сторіччя стала і залишається до теперішнього часу поперечно-циліндрична проєкція Гаусса-Крюгера [2], тому не зникає проблема визначення поправок до площі, обчисленої за плоскими координатами.

Для цього спочатку рекомендувалися карти з відомими коефіцієнтами спотворення площ елементарних сфероїдних трапецій, а пізніше - поправки до обчисленої за плоскими координатами площі:

$$\Delta S = S_{x,y} \frac{y^2}{R^2}, \quad (1)$$

де $S_{x,y}$ – площа ділянки в проєкції Гаусса-Крюгера;

y – середня ордината ділянки відносно осьового меридіана;

R – радіус кривизни земного еліпсоїда.

Питання редукування площ в проєкції Гаусса-Крюгера не розглядається

я в підручниках з вищої геодезії та математичної картографії. Вважається, що на листах топографічних карт спотворення практично незначні і не перевищують інших похибок визначення площ на картах. Сучасні вимоги до достовірності площ земельних ділянок потребують обов'язкового врахування їх спотворень.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

На спотворення площ ділянок поверхні еліпсоїду в рівнокутній геодезичній проєкції даються взначи масштаби площ та зображення сторін, вплив яких може бути більшим за середню квадратичну похибку m_s визначення площі:

$$m_s = m_p \sqrt{\frac{1}{8} \sum_{i=1}^n D_i^2}, \quad (2)$$

де m_p – похибка визначення положення межових знаків;

D_i – довжина лінії між попереднім $(i-1)$ та наступним $(i+1)$ знаками.

Визначення фактичних площ ділянок поверхні земного еліпсоїду можуть забезпечуватися розвитком методів та приладів геодезичних вимірювань, використанням числових методів обчислення площ, впровадженням комп'ютерних та геоінформаційних технологій [3, 4].

В Україні впровадження геодезичних площ при здійсненні робіт із землеустрою почалося у 2016 році [2]. При цьому неспотворені площі рекомендується визначати строгим методом на поверхні референц-еліпсоїда або введенням поправки ΔS (1) до площі в проекції Гаусса-Крюгера, але критерії щодо вибору методу відсутні.

Метою дослідження є удосконалення алгоритмів визначення геодезичних площ за плоскими прямокутними координатами та обґрунтування критеріїв використання наближених та точних числових методів.

Матеріали і методи дослідження

Розглянемо спочатку рівнопроміжну поперечно-циліндричну проекцію, в якій замість великих координатних кіл класичної сферичної проекції Кассіні використовуються геоцентричні координатні еліпси [5]. В цій еліпсоїдній проекції Кассіні при неспотворених ординатах ($m_y=1$) абсциси точок спотворюються аналогічно проекції Гаусса-Крюгера:

$$m_x = \sec\eta; \quad (3)$$

$$\eta \approx \frac{y}{R} \quad (4)$$

де η – кутовий аргумент спотворення зображення;

y – ордината заданої точки відносно осевого меридіана;

$R=6378$ км – середній радіус кривизни земного еліпсоїда для території України [2].

Для побудови трансформованої рівновеликої проекції Кассіні приймемо змінений масштаб зображення ординати:

$$m_y = \cos\eta. \quad (5)$$

Тоді змінена ордината для рівновеликої проекції прийме вигляд:

$$y' \approx R \cdot \sin\eta, \quad (6)$$

а прирости ординати від рівновеликої до рівнопроміжної проекції можна обчислити за формулою:

$$\Delta y = y - y' \approx y - R \cdot \sin \frac{y}{R}. \quad (7)$$

Оскільки абсциси не змінюються при зміні масштабу спотворення ординат, то поправку в площу можна обчислити за формулою:

$$\Delta S = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \Delta y_i (x_{i-1} - x_{i+1}), \quad (8)$$

де $i=1, 2, 3, \dots, n$ – номери поворотних точок ділянки.

Побудова трансформованої рівнокутної проекції Кассіні потребує, щоб масштаби зображення абсциси m_x та ординати m_y були однакові:

$$m_x = m_y = \sec\eta. \quad (9)$$

Тоді змінена ордината для рівнокутної трапеції прийме вигляд:

звідки кутовий аргумент спотворення дорівнює

$$y'' \approx R \cdot \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\eta}{2} \right), \quad (10)$$

$$\eta = 2 \cdot \left\{ \operatorname{arctg} \left[\exp \left(\frac{y}{R} \right) \right] - \frac{\pi}{4} \right\}, \quad (11)$$

а прирости ординати від рівновеликої до рівнокутної проекції можна обчислити за формулами:

$$\Delta y'_i = R\eta_i - R\sin\eta_i; \quad (12)$$

$$\Delta y''_i = y_i - R\eta_i; \quad (13)$$

$$\Delta y_i = \Delta y'_i + \Delta y''_i = y_i - R \cdot \sin\eta_i. \quad (14)$$

Поправку в площу можна обчислити за формулою (8) або з урахуван-

ням тільки ординати центра тяжіння ум за формулою:

$$\Delta S = S_{x,y} \cdot \eta_m \cdot \sin \eta_m, \quad (15)$$

де $S_{x,y}$ – площа ділянки за прямокутними координатами;

η_m – кутовий аргумент спотворення (11), обчислений за середньою ординатою um ;

Наближене значення геодезичної площі обчислюється за формулою:

$$S = S_{x,y} - \Delta S. \quad (16)$$

Таким чином, для обчислення наближеного значення геодезичної площі за координатами в рівнокутних проєкціях можемо скористатися відомою формулою поправки (1) до обчисленої площі, яка рекомендована при здійсненні робіт із землеустрою [2], або запропонованими формулами (15) та (8).

Оцінити необхідність врахування спотворення площі земельної ділянки можна порівнянням обчисленої поправки (1), (8) або (15) з середньою квадратичною похибкою визначення площі (2). При несиметричних схемах з довжинами сторін 1-5 км краще скористатися рівновеликими проєкціями, а при більших довжинах сторін – геодезичні площі слід визначати числовими методами за апроксимованими геодезичними лініями.

Результати дослідження та їх обговорення

Для аналізу точності наведених методів врахування спотворення площ були створені моделі ділянок поверхні земного еліпсоїда з симетричними (коло, квадрат, зірка тощо) і довільними несиметричними контурами. Геодезичні координати кутів повороту визначалися розв'язанням прямих геодезичних задач за фор-

мулами Бесселя, а геодезичні площі ділянок обчислювалися за апроксимованими геодезичними лініями на поверхні еліпсоїда. Потім за відповідними плоскими координатами в проєкціях Сансона, Кассіні та Гаусса-Крюгера обчислювалися площі, поправки за їх спотворення та виправлені значення площ.

Математичне моделювання підтвердило можливість використання при певних умовах усіх розглянутих методів. При цьому найточніше враховуються спотворення поправкою за формулою (8), найменша точність – за формулою (1).

Наприклад, остаточні похибки площ після врахування спотворень за масштаб зображення в проєкціях Гаусса-Крюгера та Кассіні для симетричної моделі (рис. 1), геодезична

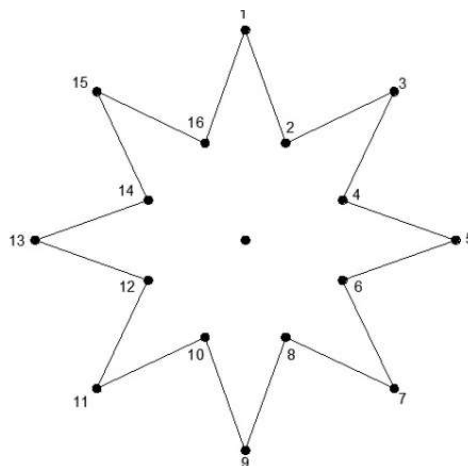


Рис. 1. Схема моделі земельної ділянки

площа якої складає $S=15307,3 \text{ м}^2$, наведені в таблиці 1. Центральна точка моделі розташована на широті $B=50^\circ$ та довготах від $L=0^\circ$ до $L=40^\circ$, а відстані від центральної до відповідних точок – 100 та 50 метрів. Середня квадратична похибка (СКП) площі за координатами Гаусса-Крюгера скла-

1. Результати врахування спотворення площі

L°	Проекція Гаусса-Крюгера			Проекція Кассіні		
	$\delta S, \text{ м}^2$	$\delta S_1, \text{ м}^2$	$\delta S_2, \text{ м}^2$	$\delta S, \text{ м}^2$	$\delta S_2, \text{ м}^2$	$\delta S_3, \text{ м}^2$
0°	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
10°	193,6	-1,9	-0,3	96,6	0,3	0,0
20°	779,4	-27,4	-1,2	385,5	4,7	0,0
30°	1767,0	-136,4	-3,4	861,3	23,0	0,1
40°	3155,5	-424,3	-7,7	1508,7	68,0	0,3

дає 0,9 кв.м (5,9Е-3 %) для СКП визначення положення точок 1 см.

В наведеній таблиці прийняті наступні позначення: δS – спотворення площі, обчисленої за прямокутними координатами точок у відповідній проекції; δS_1 – остаточне спотворення площі після врахування поправки, обчисленою за формулою (1); δS_2 – остаточне спотворення після врахування поправки (15); δS_3 – остаточне спотворення після врахування поправки (8).

Висновки та пропозиції

Значення площ земельних ділянок, обчислених за плоскими прямокутними координатами Гаусса-Крюгера, завжди більше відповідних геодезичних площ в зв'язку з впливом масштабу зображення площ в цій проекції. Тому для врахування спотворення площ потрібно вводити поправки (1), (8) або (15) в обчислену площу у випадках, коли величина поправки перевищує похибку площі (2). Крім того, на спотворення площ впливає також кривизна зображення геодезичних ліній. Для врахування впливу цього фактору краще скористатися числовими методами визначення площ за апроксимованими геодезичними лініями. При довжинах ліній до 5 км в межах трьохградусної координатної зони можна використовувати рівновеликі проекції для до-

статньо надійного визначення геодезичних площ.

Список використаної літератури

1. Гудз, І. М. (2021). Основи математичної картографії. Львів: Видавництво Львівської політехніки, 504.
2. Міністерство аграрної політики та продовольства України. (2016, 2 грудня). Порядок використання Державної геодезичної референцної системи координат УСК-2000 при здійсненні робіт із землеустрою (Наказ № 509 від 02.12.2016 р.). (URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/z1646-16#Text>).
3. Kin, D., & Karpinskiy Y. (2020). Peculiarities of the method of calculation feature's geodetic area on the reference ellipsoid in GIS. International Conference of Young Professionals «GeoTerrace-2020». (DOI: <https://doi.org/10.3997/2214-4609.20205757>).
4. Кінь, Д. (2024). Щодо підвищення точності аналітичних та чисельних методів геодезичних та картометричних операцій. Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва, 1 (47), 149-160. (DOI: <https://doi.org/10.33841/1819-1339-1-47-149-160>).
5. Радов, С., Ротте С., Соболев М., Литвин В., Волонтир А. (2025). Високоточний алгоритм перетворення координат для рівнопроміжної поперечної циліндричної проекції. Міжвідомчий науково-технічний збірник «Геодезія, картографія та аерофотозйомка», 101, 26-34. (DOI: <https://doi.org/10.23939/istcgcap2025.101.026>).

References

1. Hudz, I. M. (2021). *Osnovy matematychnoyi kartohrafiyi* [Fundamentals of Mathematical Cartography]. Lviv: Lviv Polytechnic Publishing House, 504.
2. Ministry of Agrarian Policy and Food of Ukraine. (2016). Procedure for the use of the State Geodetic Reference Coordinate System USK-2000 in land management works, 509. Available at: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/z1646-16#Text>.
3. Kin, D., & Karpinskyi, Y. (2020). Peculiarities of the method of calculation feature's geodetic area on the reference ellipsoid in GIS. International Conference of Young Professionals «GeoTerrace-2020». DOI: <https://doi.org/10.3997/2214-4609.20205757>.
4. Kin, D. (2024). Shchodo pidvyshchennya tochnosti analitychnykh ta chysel'nykh metodiv heodezychnykh ta kartometrychnykh operatsiy [To improve the accuracy of analytical and numerical methods of geodetic and cartometric operations]. Current achievements of geodetic science and industry. Issue I (47), 149-160. DOI: <https://doi.org/10.33841/1819-1339-1-47-149-160>.
5. Radov, S., Rotte, S., Soboliev, M., Lytvyn, V. & Volontyr, A. (2025). Vysokotochnyy alhorytm peretvorenniya koordynat dlya rivnopromizhnoyi poperechnoyi tsylindrychnoyi proektsiyi [High-precision coordinate transformation algorithm for equidistant transverse cylindrical projection]. Interdepartmental scientific and technical collection "Geodesy, cartography and aerial photography", 101, 26-33. DOI: <https://doi.org/10.23939/istcgcap2025.101.026>.

Radov S., Rotte S., Volontyr A., Lytvyn V., Stanko P.

REFINED ALGORITHM FOR CALCULATING AREA DISTORTION ADJUSTMENTS OF GEOSPATIAL OBJECTS IN GEODETIC PROJECTIONS

LAND MANAGEMENT, CADASTRE AND LAND MONITORING 2'25: 33-38.

<http://dx.doi.org/10.31548/zemleustriy2025.02.03>

Abstract. *Abstract. Area, as one of the fundamental geometric parameters of land parcels, is a key factor in land management, land cadaster, land taxation, and related fields. The geodetic area should ideally be determined on the surface of the reference ellipsoid; however, in engineering practice, it is usually calculated from the coordinates of turning points in the Gauss-Krüger projection. The influence of projection is approximately accounted for by introducing a correction to the computed area value derived from rectangular coordinates. At the same time, the geodetic area may differ significantly from its approximate value.*

There are no exact (closed-form) formulas to calculate the areas of arbitrary parcels on the ellipsoid surface based on the geodetic coordinates of turning points. Therefore, the most accurate values of geodetic areas of geospatial objects are obtained by numerical methods, including those used in geographic information systems. A simpler method of determining "undistorted" land parcel areas relies on equal-area geodetic projections.

This study employs the Sanson, Gauss-Krüger and Cassini projections. For the Gauss-Krüger and Cassini projections, algorithms are provided for calculating corrections based on the ordinate of the parcel's centroid and the ordinates of all turning points. The accuracy of the proposed algorithms has been analyzed using mathematical modeling.

Key words: *geodetic area, geodetic projections, area distortion, correction to calculated area.*