

ГЕОДЕЗИЧНИЙ СУПРОВІД БУДІВНИЦТВА ЖИТЛА, ПРОМИСЛОВИХ І ТРАНСПОРТНИХ ОБ'ЄКТІВ

ISSN 2306-1677 (Print) ISSN 2518-7325 (On-line)

Отримано: 31.01.2026; Прийнято: 17.02.2026; Опубліковано: 30.03.2026;

УДК 528.486:625.724

<http://dx.doi.org/10.31548/zemleustriy2026.01.07>

З'ЄДНАННЯ ДУГ ДВОХ КОЛОВИХ КРИВИХ ПРИ ПРОЄКТУВАННІ ТА РЕКОНСТРУКЦІЇ АВТОМОБІЛЬНИХ ДОРІГ

М.П. МАРУЩАК,

кандидат технічних наук, доцент

m.marushchak@chdtu.edu.ua

ORCID: 0000-0001-6075-1840

С. Г. РАДОВ,

кандидат технічних наук, доцент

s.radov@chdtu.edu.ua

ORCID: 0009-0003-5721-996X

С. В. РОТТЕ,

кандидат технічних наук, доцент

s.rotte@chdtu.edu.ua

ORCID: 0000-0003-1281-1241

А. В. ВОЛОНТИР,

старший викладач

a.volontyr@chdtu.edu.ua

ORCID: 0000-0001-5609-4569

О. В. КУЗНЕЦОВА,

старший викладач

o.kuznetsova@chdtu.edu.ua

ORCID: 0009-0006-2189-7306

Черкаський державний технологічний університет

Анотація. Безпека та умови руху автомобільного транспорту суттєво залежать від впливу криволінійних ділянок. Для практичного використання постійно удосконалюються методи проектування горизонтальних кривих. На цей час в наукових виданнях відсутні прості та надійні методи проектування пере-

хідних кривих для з'єднання двох однобічно направлених колових кривих. Наявні методи пошуку оптимальних перехідних кривих використовують ітераційні процеси та спеціально розроблені програмні продукти. Тому вдосконалення методики розв'язання задачі з'єднання колових кривих набуває практичного значення. В роботі розглянуті основні варіанти формування криволінійних ділянок з двома коловими кривими - з'єднання прямими вставками, дугами кіл більшого радіусу та клоотоїдами, а також пошук клоотоїди, яка є спільною для двох колових кривих та забезпечує збереження їх центрів. Доведено, що при відомому положенні центрів та дуг колових кривих заданих радіусів, пошук оптимальної клоотоїди може виконуватися стандартною функцією «Пошук рішення» меню «Microsoft Excel». Можливі варіанти розташування крайніх точок клоотоїди на існуючих або запроєктованих колових кривих задається дирекційними кутами між центрами кривих та початковими і кінцевими точками колових кривих. Наведені приклади розрахунків прямих вставок та клоотоїд для з'єднання між собою двох колових кривих.

Ключові слова: колова крива, геометричні умови з'єднання, пряма вставка, клоотоїда, оптимізація, пошук рішення.

Актуальність

Проектування, будівництво та реконструкція криволінійних ділянок автомобільних доріг потребує подальшого розвитку та впровадження інноваційних технологій їх геодезичного забезпечення. Плавність зміни радіусу кривизни дороги досягається вставкою перехідних кривих, які зменшують негативний вплив відцентрового прискорення на транспортні засоби та учасників дорожнього руху. При цьому переважно використовуються клоотоїда з лінійною залежністю кривини від довжини її дуги. Рідше в якості перехідних кривих приймають інші спіралі, кубічні параболи та поліноми більших ступенів.

Особливим випадком можна вважати наявність повернутих в один бік двох горизонтальних кривих, відстань між якими не дозволяє традиційну побудову перехідних кривих. З'єднання таких колових кривих короткими прямими вставками не рекомендується, а їх заміна однією

коловою кривою більшого радіусу призводить до суттєвого планового зміщення первинних кривих. Оптимальним з'єднанням двох сусідніх колових кривих може слугувати перехідна крива. Існуючі методи моделювання такої перехідної кривої використовують, як правило, ітераційний процес оптимізації і мають обмежене практичне застосування. В зв'язку з цим пошук простих та надійних методів проектування перехідних кривих між двома криволінійними ділянками має важливе практичне значення.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Діючі державні будівельні норми (ДБН) транспортних споруд [1; 2; 3] по різному регулюють питання з'єднання між собою двох однаково спрямованих колових кривих на автодорогах, залізницях та у метрополітені. Слід також відзначити, що відповідні норми для автодоріг та метрополітенів змінилися у порівнян-

ні з попередніми (вже не діючими) ДБН [4; 5]. Наприклад, раніше для автодоріг в залежності від взаємного розташування таких колових кривих рекомендувалося замінити їх однією коловою кривою більшого радіусу, з'єднувати перехідною кривою або прямою вставкою [4, п. 2.30]. Для колій метрополітену також було передбачено, що між круговими кривими різних радіусів вставляються перехідні криві [5, п. 7.2]. В діючих нормах [1, п. 5.1.11] та [2, п. 7.8] тільки відзначається необхідність в таких випадках проектувати односкатний поперечний профіль з відгоном віражу на частині колової кривої та на суміжній прямій ділянці траси.

Побудова перехідної кривої між такими коловими кривими розглянута, наприклад, в роботах [6-10]. Автори монографії [6, с. 124, 138] найбільш повно і детально досліджують моделювання різноманітних кривих із змінними радіусами та оптимізацією пошуку невідомих коефіцієнтів рівняння розподілу кривини і довжини дуги між кінцевими точками за алгоритмом Хука-Дживса. Формули обчислення координат клоатоїди, що з'єднує дві колові криві, наведені в роботі [7, с. 19] з невідомою довжиною перехідної кривої, яку потрібно визначити методом наближень. Також розглядаються варіанти побудови перехідної кривої у вигляді квадратичної спіралі [8], рою частинок дуг [9], кубічної параболи [10] тощо. Очевидно, що необхідність використання способу ітерацій для пошуку остаточного варіанту перехідної кривої ускладнює впровадження цих алгоритмів в інженерну практику.

Мета та завдання дослідження. Дослідження проведено для оцінки можливості прямого визначення неві-

домих параметрів перехідної кривої, що з'єднує дві однаково направлені колові криві, та розробки алгоритмів розрахунку й об'єктивного контролю перехідної кривої.

Матеріали і методи дослідження

Обґрунтування алгоритмів з'єднання двох колових кривих перехідними кривими здійснено з використанням методів аналізу, синтезу та математичного моделювання.

Виклад основного матеріалу

Постановка задачі. Об'єднання двох колових кривих різних радіусів в безперервну трасу може відбуватися прямими вставками (рис. 1, а) або перехідними кривими, які в точках з'єднання мають бути дотичними до колових кривих. Крім того, колові криві та пряма вставка можуть бути замінені на одну колову криву (рис. 1, б), яка при необхідності може з'єднуватися з прямолінійними ділянками перехідними кривими (рис. 2, а) або замінена на біклоатоїду [11] (рис. 2, б). В розглянутих випадках використання колових та перехідних кривих відбувається зміщення існуючої або запроєктованої траси (див. рис. 1-2), що може бути неможливим або недоречним в зв'язку з місцевими умовами (наявність перешкод, містобудівні або землепорядні обмеження тощо).

В таких випадках дві колові криві краще з'єднувати перехідною кривою, просторове розташування якої буде наближене до ділянки $A1B1$ існуючої траси.

Загальні положення щодо проєктування перехідної кривої між двома коловими кривими. Для двох ко-

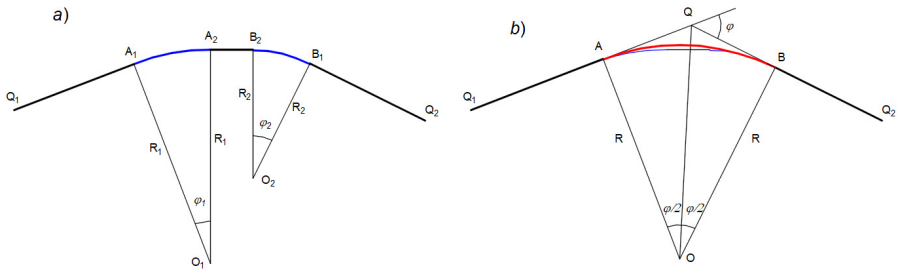


Рис. 1 - Схема траси: а) дві колові криві (A1A2, B1B2) та пряма вставка (A2B2); б) заміна кривих на одну колову криву (AB)

Розроблено авторами

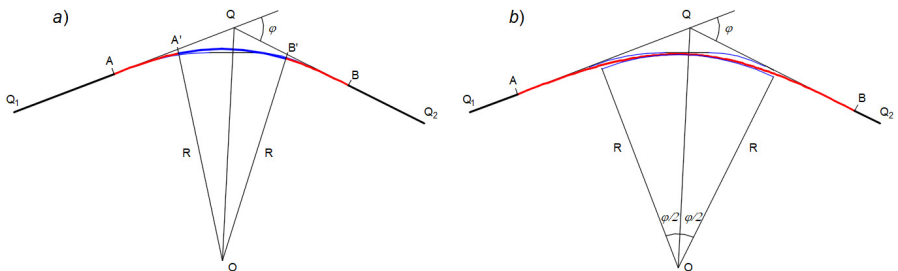


Рис. 2 - Схема траси: а) дві клотоїди (AA', BB') та колова крива (A'B'); б) заміна кривих на біклотоїду (AB)

Розроблено авторами

лових кривих A_1A_2 та B_1B_2 (див. рис. 1, а) можна побудувати нескінченну кількість різноманітних перехідних кривих, крайні точки яких будуть знаходитися в межах дуг відповідних кривих. Довжина таких перехідних кривих буде залежати від їх виду та віддалення початку і кінця перехідної кривої від кінцевих точок колових кривих A_2 та B_2 , тому на практиці доцільно обмежитись інтервалом від середини до кінця колових кривих.

При проектуванні перехідної кривої AB можна довільно обрати її початкову точку (A) в заданому інтервалі дуги CK_1-A_2 першої кривої та визначити її координати (x_A, y_A) за відомими формулами:

$$\left. \begin{aligned} x_A &= x_{O_1} + R_1 \cos \alpha_{O_1A} \\ y_A &= y_{O_1} + R_1 \sin \alpha_{O_1A} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

де x_{O_1}, y_{O_1} та R_1 – координати центру та радіус першої колової кривої; α_{O_1A} – дирекційний кут лінії з центру кола на точку A .

Аналогічно визначається кінцева точка перехідної кривої (B) в заданому інтервалі дуги B_2-CK_2 другої кривої та визначаються її координати (x_B, y_B) .

Вставка перехідної кривої між двома існуючими коловими кривими (рис. 3) полягає в пошуку такої дотичної кривої, для якої в точках з'єднання збігаються геометричні параметри перехідної та колових кривих ($i = 1, 2$):

$$\varphi_i = \gamma_i; \quad (2)$$

$$\rho_i = R_i, \quad (3)$$

а розрахункові координати центрів кіл задовольняють рівняння:

$$\sqrt{(x_{o_2} - x_{o_1})^2 + (y_{o_2} - y_{o_1})^2} = b_{12}, \quad (4)$$

де φ_i та γ_i – кути повороту перехідної та колових кривих в точках їх з'єднання;

ρ_i та R_i – радіуси перехідної та колових кривих в точках їх з'єднання;

x_{o_i}, y_{o_i} – координати центрів колових кривих відносно початку перехідної кривої;

b_{12} – відстань між центрами заданих колових кривих.

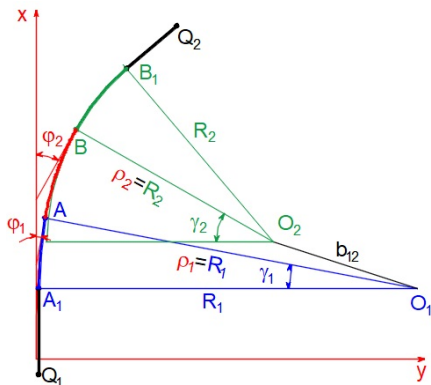


Рис. 3. Схема з'єднання двох колових кривих клотоїдою

Розроблено авторами

Незалежно від виду перехідної кривої, координати центрів колових кривих можуть визначатися за формулами:

$$\left. \begin{aligned} x_{o_i} &= x_j - R_i \sin \varphi_i; \\ y_{o_i} &= y_j + R_i \cos \varphi_i; \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

де x_j, y_j ($j = A, B$) – умовні координати точок з'єднання перехідної та колових кривих.

Повне дотримання геометричних умов з'єднання двох колових кривих (2)-(4) може бути досягнуте при використанні клотоїди (рис. 3), але вона не завжди забезпечує таке з'єднання. Наприклад, якщо радіуси колових кривих однакові, то між ними неможливо побудувати клотоїду. Практика сполучення колових кривих з прямолінійними ділянками показує, що зміна радіусів в точках їх з'єднання менше впливає на безпеку руху ніж невідповідність кутів повороту. Тому сполучення двох колових кривих може відбуватися прямими вставками та перехідними кривими, які в точках з'єднання є дотичними до колових кривих.

Розрахунок прямої вставки. Граничними даними для проектування перехідної кривої мають бути положення головних точок колових кривих. Для побудови відрізка прямої лінії, яка є дотичною до двох кіл, знайдемо координати точок A_2 та B_2 (див. рис. 1), в яких пряма вставка з'єднується з коловими кривими:

$$\left. \begin{aligned} x_{A_2} &= x_{o_1} + R_1 \cos \alpha_{o_1 A_2}; \\ y_{A_2} &= y_{o_1} + R_1 \sin \alpha_{o_1 A_2}; \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} x_{B_2} &= x_{o_2} + R_2 \cos \alpha_{o_2 B_2}; \\ y_{B_2} &= y_{o_2} + R_2 \sin \alpha_{o_2 B_2}; \end{aligned} \right\}$$

де $\alpha_{o_1 A_2}, \alpha_{o_2 B_2}$ – невідомі дирекційні кути ліній з центрів кіл та точки A_2, B_2 .

Розв'язавши обернену геодезичну задачу за координатами центрів колових кривих

$$\operatorname{tg} \alpha_{o_1 o_2} = \frac{y_{o_2} - y_{o_1}}{x_{o_2} - x_{o_1}}; \quad (7)$$

$$b_{12} = \frac{y_{o_2} - y_{o_1}}{\sin \alpha_{o_1 o_2}} = \frac{x_{o_2} - x_{o_1}}{\cos \alpha_{o_1 o_2}} \quad (8)$$

та визначивши горизонтальний кут (ω) між лініями $A_2 B_2$ та $O_1 O_2$

$$\cos \omega = \frac{R_1 - R_2}{b_{12}}, \quad (9)$$

можна обчислити невідомі дирекційні кути $\alpha_{O_1A_2}$, $\alpha_{O_2B_2}$ за формулою:

$$\alpha_{O_1A_2} = \alpha_{O_2B_2} = \alpha_{O_1O_2} - \omega. \quad (10)$$

Приклад розрахунку координат точок з'єднання прямої вставки з колесними кривими наведено в табл. 1.

1. Розрахунок прямої вставки

$x_{O_1} =$	1250 м	$x_{O_2} =$	1200 м
$y_{O_1} =$	2500 м	$y_{O_2} =$	2550 м
$R_1 =$	250 м	$R_2 =$	150 м
$b_{12} =$	111,803 м	$\alpha_{O_1O_2} =$	26,565051°
$\omega =$	26,565051°	$\alpha_{O_1A_2} =$	0,0°
$x_{A_2} =$	1500,000 м	$x_{B_2} =$	1500,000 м
$y_{A_2} =$	2500,000 м	$y_{B_2} =$	2550,000 м
$d_{пр.вст.} =$	50,000 м	$\alpha_{пр.вст.} =$	90,0°

Побудова дуги кола між заданими точками двох колових кривих.
У випадку проектування з'єднання двох колових кривих з однаковими радіусами за перехідну криву можна використати дотичну дугу кола AB (рис. 4). Її можна побудувати з використанням властивості бісектриси кутів між дотичною та хордою. При відомому положенні двох точок (A – початок кривої, B – кінець кривої) та центру (O) колової кривої, легко

знайти дирекційні кути (α_{AO} , α_{BO}) відповідних напрямків на центр кола та побудувати допоміжну точку C (вершину кута повороту).

Графічна побудова проміжних точок (C , D , E , ...) полягає в послідовному поділі відомої дуги на дві рівні частини. Наприклад, положення точки C знаходимо на перетині бісектрис AC та BC кутів між дотичними AC' , BC' та хордою AB (див. рис. 4). Аналогічно, відносно хорди AC визначаємо положення точки D , а від хорди CB – точки E . Повторюючи такі дії з новими хордами AD , DC , CE , EB тощо, знайдемо положення достатньої кількості проміжних точок заданої дуги AB .

Аналітичне визначення координат проміжних точок можливе за формулами Юнга для прямої кутової або за формулами Гаусса для азимутальної засічки. Але точність засічки буде суттєво зменшуватися для малих хорд. Більш надійним є використання традиційного способу розрахунку умовних прямокутних координат та інших геометричних параметрів колових кривих. Для цього потрібно за координатами точок A , B (x_A, y_A ; x_B, y_B) та дирекційними кутами ліній AO_1 , BO_2 (α_{AO_1} ; α_{BO_2}) знайти кут повороту (φ) та радіус з'єднуючої дуги (R) за формулами:

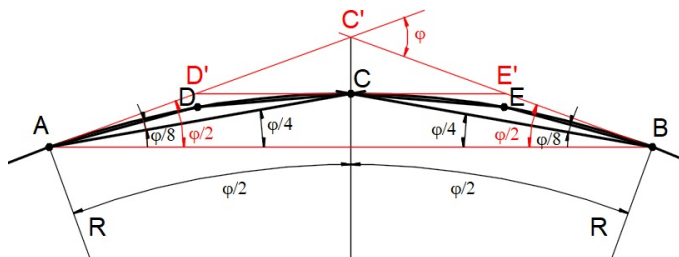


Рис. 4. Графічна побудова дуги AB колової кривої

Розроблено авторами

$$\varphi = \alpha_{BO_2} - \alpha_{AO_1} \quad (11)$$

$$R = \frac{(x_B - x_A)\sin\alpha_{AO_1} - (y_B - y_A)\cos\alpha_{AO_1}}{\sin(\alpha_{AO_1} - \alpha_{BO_2})} \quad (12)$$

або

$$R = \frac{(x_B - x_A)\sin\alpha_{BO_2} - (y_B - y_A)\cos\alpha_{BO_2}}{\sin(\alpha_{AO_1} - \alpha_{BO_2})} \quad (13)$$

У випадку з'єднання двох колових кривих з різними радіусами перехідна крива може аналогічно проектуватися у вигляді дотичної дуги кола AB .

Розрахунок перехідної кривої у вигляді клоатоїди. Загальний принцип побудови клоатоїди вимагає, щоб обидві з'єднані колові криві були дотичними до клоатоїди в початковій (A) та кінцевій (B) точках перехідної кривої AB .

Основні рівняння клоатоїди зв'язують радіус (ρ_i) та кут повороту (φ_i) поточної точки з її віддаленням (l_i) від початку та параметром клоатоїди (RL):

$$\rho_i = \frac{RL}{l_i}; \quad \varphi_i = \frac{l_i^2}{2RL} \quad (14)$$

Позначимо невідомий параметр RL клоатоїди через C , тоді для перехідної кривої AB після перетворень маємо ($i=1, 2$):

$$l_i = \frac{C}{R_i}; \quad \varphi_i = \frac{C}{2R_i^2} \quad (15)$$

де l_i, φ_i, R_i – елементи клоатоїди в її початковій A ($i=1$) та кінцевій B ($i=2$) точках.

Враховуючи, що різниця кутів повороту φ_2 та φ_1 пов'язана з дирекційними кутами ліній α_{AO_1} та α_{BO_2} ліній AO_1 та BO_2 (рис. 5)

$$\Delta\varphi = \frac{C}{2} \left(\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2} \right), \quad (16)$$

знайдемо невідомий параметр клоатоїди за формулою:

$$C = 2 \cdot \Delta\varphi \cdot R^2, \quad (17)$$

де

$$R^2 = \frac{R_1^2 \cdot R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} \quad (18)$$

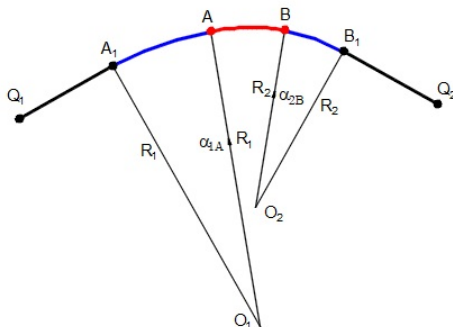


Рис. 5. З'єднання двох колових кривих клоатоїдою

Розроблено авторами

Розглянемо приклад визначення параметру клоатоїди (див. рис. 5) за вихідними даними, що наведені в табл. 2.

Невідомий параметр клоатоїди обчислимо за формулою (17):
 $C = 2 \cdot 0,33161256 \text{ рад} \cdot 35156,250 \text{ м}^2 = 23316,508 \text{ м}^2$.

Тепер координати точок початкової A і кінцевої B точок перехідної кривої та центрів колових кривих O_1 і O_2 можна обчислити за відомими формулами:

$$\left. \begin{aligned} x_i &= \frac{C}{R_i} - \frac{C^3}{40 \cdot R_i^5} + \frac{C^5}{3456 \cdot R_i^9} - \dots; \\ y_i &= \frac{C^2}{6 \cdot R_i^3} - \frac{C^4}{336 \cdot R_i^7} + \frac{C^6}{42240 \cdot R_i^{11}} - \dots \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

та

$$\left. \begin{aligned} x_{O_i} &= \frac{C}{2 \cdot R_i} - \frac{C^3}{240 \cdot R_i^5} - \frac{C^5}{34560 \cdot R_i^9} + \dots; \\ y_{O_i} &= R_i + \frac{C^2}{24 \cdot R_i^3} - \frac{C^4}{2688 \cdot R_i^7} + \frac{C^6}{506880 \cdot R_i^{11}} - \dots \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Для перевірки відповідності знайденої клоатоїди вихідним даним, необхідно порівняти вихідні довжини

ліній O_1O_2 та AB з їх розрахунковими значеннями (табл. 3). У випадку задоволення геометричних умов з'єднання двох колових кривих (2)-(4), визначаються усі необхідні дані для перехідної кривої за традиційною методикою. Для перетворення координат точок клотоїди до вихідної системи використовуються розрахункові та вихідні координати центрів колових кривих.

Якщо розрахункові довжини ліній AB (d_{AB}) та O_1O_2 (b_{12}) не відповідають їх вихідним значенням, то задані точки A та B не належать одній клотоїді.

Результати дослідження та їх обговорення. Для визначення можливості з'єднання заданих колових кривих клотоїдою необхідно проаналізувати

усю комбінацію взаємного розташування точок в інтервалах між початком та кінцем кожної кривої. Наприклад, точки розглянутих раніше колових кривих (див. табл. 2) можуть знаходитися в діапазонах дирекційних кутів ліній $340^\circ \leq \alpha_{O_1A} \leq 360^\circ$ та $0^\circ \leq \alpha_{O_2B} \leq 20^\circ$. Визначення оптимального розташування клотоїди можливо за допомогою стандартної функції «Пошук рішення» («Solver») меню «Microsoft Excel» (табл. 4 – завдання на оптимізацію, табл. 5 – результат оптимізації). При цьому оптимізація відбувається за цільовою функцією

$$F = b_{12} - b'_{12} = 0, \quad (21)$$

де b_{12} – вихідне значення відстані між центрами колових кривих (4);

b'_{12} – розрахункове значення відстані між центрами колових кривих.

2. Вихідні дані для розрахунку клотоїди

$x_{o_1} =$	600,000 м	$x_{o_2} =$	699,485 м	$\alpha_{o_1o_2}$	357,620°
$y_{o_1} =$	500,000 м	$y_{o_2} =$	495,866 м	$b_{12} =$	99,571 м
$R_1 =$	250,000 м	$R_2 =$	150,000 м	$R_2 =$	35156,250 м ²
$\alpha_{o_1A} =$	350,5°	$\alpha_{o_2B} =$	9,5°	$\Delta\varphi =$	19,0°
$x_A =$	846,571 м	$x_B =$	847,428 м	$\alpha_{AB} =$	89,207°
$y_A =$	458,738 м	$y_B =$	520,623 м	$d_{AB} =$	61,891 м

3. Розрахункові дані клотоїди

$C = 23316,508$ м ²	$\Delta\varphi = 19,00^\circ$	$d_{AB} = 61,892$ м	$b_{12} = 99,571$ м				
Точки	l, м	ρ , м	φ°	x_i , м	y_i , м	x_{oi} , м	y_{oi} , м
A	93,266	250,000	10,69	92,942	5,785	46,579	251,448
B	155,443	150,000	29,69	151,322	26,337	77,031	156,648

Під час формування завдання на оптимізацію (табл. 4) вихідними даними є радіуси колових кривих (R_1 , R_2), один з можливих варіантів кутів повороту ($\varphi_1 = \alpha_{O_1A}$, $\varphi_2 = \alpha_{O_2B}$) та відстань між центрами заданих колових кривих (b_{12}). В

контрольному прикладі (див. табл. 3), крім того, відомою є довжина хор-

4. Вихідні дані для «Пошуку рішення»

Позначення	A	B	Позначення	A	B
$R_i =$	250,000 м	150,000 м	$x_i =$	193,343 м	290,455 м
$\varphi_i =$	340,00°	20,00°	$y_i =$	25,420 м	109,261 м
$\Delta\varphi =$	40,00°	0,69813 рад.	$d_{AB} =$	61,892 м	128,296 м
$R^2 =$	35156,250 м ²		$x_{oi} =$	97,672 м	157,349 м
$C =$	49087,385 м ²		$y_{oi} =$	256,390 м	178,516 м
$l_i =$	196,350 м	327,249 м	$b_{12} =$	99,571 м	98,111 м
			$F =$	-1,460 м	

5. Результат оптимізації цільової функції

Позначення	<i>A</i>	<i>B</i>	Позначення	<i>A</i>	<i>B</i>
$R_i=$	250,000 м	150,000 м	$x_i=$	92,943 м	151,323 м
$\varphi_i=$	350,498°	9,498°	$y_i=$	5,785 м	26,337 м
$\Delta\varphi=$	19,00°	0,33161 рад.	$d_{AB}=$	61,892 м	61,892 м
$R^2=$	35156,250 м ²		$x_{oi}=$	46,579 м	77,032 м
$C=$	23316,679 м ²		$y_{oi}=$	251,448 м	156,648 м
$l_i=$	93,267 м	155,445 м	$b_{i2}=$	99,571 м	99,571 м
			$F=$	4,1E-10 м	

ди між точками *A* та *B* (d_{AB}). Усі інші величини в табл. 4 обчислюються за формулами (15), (17)-(21) та (4) за радіусами колових кривих (R_1 , R_2) та різницею вихідних кутів повороту ($\Delta\varphi$). Оскільки цільова функція ($F=-1,460$ м) не задовольняє умову (21), потрібно знайти оптимальне рішення, змінюючи в заданих діапазонах можливі значення кутів повороту (φ_1) та (φ_2).

Після звернення до стандартної функції «Пошук рішення» обчислювані параметри приймають значення, що відповідають оптимальному рішення (табл. 5) та з точністю до 1 мм співпадають з розрахунковими даними прийнятої моделі клотоїди (див. табл. 3).

У випадках відсутності оптимального рішення замість клотоїди можна рекомендувати, наприклад, дугу кола більшого радіусу (див. рис. 4) для з'єднання двох заданих колових кривих.

Висновки та перспективи подальших досліджень

Найбільш повне виконання геометричних умов з'єднання двох колових кривих досягається за допомогою клотоїди. В роботі доведено, що не завжди існує клотоїда, яка забезпечує коректне з'єднання двох колових кривих. В таких випадках може використовуватись, наприклад, дуга кола біль-

шого радіусу між обраними точками з'єднаних колових кривих.

Формування можливих варіантів розташування початкової та кінцевої точок клотоїди досягається зазначенням вихідних координат центрів колових кривих та встановленням діапазону дирекційних кутів ліній між точками колових кривих та їх центрами. Для пошуку клотоїди, яка є спільною для двох колових кривих та забезпечує збереження їх центрів, пропонується використовувати стандартну функцію «Пошук рішення» меню «Microsoft Excel».

Список використаної літератури

1. Автомобільні дороги. Частина I. Проектування. Частина II. Будівництво: ДБН В.2.3-4:2015. Київ : Міністерство регіонального розвитку, будівництва та житлово-комунального господарства України, 2015. 104 с. URL: <https://e-construction.gov.ua/files-token/17e7804f196aeffa89ee1a09e835cb33>.
2. Метрополітени. Основні положення : ДБН В.2.3-7:2018. Київ : Міністерство регіонального розвитку, будівництва та житлово-комунального господарства України, 2019. 70 с. URL: <https://e-construction.gov.ua/files-token/3a54024efcd93e7f047d37813db144ab>.
3. Залізничі колії 1520 мм. Норми проектування : ДБН В.2.3-19:2025. Київ :

- Міністерство розвитку громад та територій України, 2025. 123 с. URL: <https://e-construction.gov.ua/files-token/cb03f70d8d401342196675c8f436c74e>.
4. Споруди транспорту. Автомобільні дороги : ДБН В.2.3-4-2000. Київ : Державний комітет будівництва, архітектури та житлової політики України, 2000. 114 с. URL: <https://dbn.co.ua/load/normativy/dbn/1-1-0-210>.
 5. Споруди транспорту. Метрополітени: ДБН В.2.3-7-2010. Київ : Міністерство регіонального розвитку та будівництва України, 2011. 192 с. URL: <https://dreamdim.ua/wp-content/uploads/2019/06/DBN-V23-7-2010-Metropolitan.pdf>.
 6. Борисенко В. Д., Устенко С. А., Устенко І. В. Геометричне моделювання кривих ліній і поверхонь у натуральній параметризації: монографія. Миколаїв: МНУ, 2018. 216 с. URL: <https://rep.nuos.edu.ua/server/api/core/bitstreams/e24ed918-9f0e-46b2-8f18-10f8ee58df77/content>.
 7. Deakin R. E. Horizontal curves. Circular curves, compound circular curves, reverse circular curves, transition curves and compound curves. August 2005. 30 p. URL: <https://www.mygeodesy.id.au/documents/Horizontal%20Curves.pdf>.
 8. Comparison of transition curves in terms of lateral acceleration and lateral jerk / Gottam Sahithi et al. International journal of recent technology and engineering (IJRTE). 2019. Vol. 8, iss. 1. P. 2714–2718. URL: <https://www.ijrte.org/wp-content/uploads/papers/v8i1/A1337058119.pdf>.
 9. Katarzyna Małgorzata Palikowska. Modelling of Curvature of the railway track geometrical layout using particle swarm optimization. *Logistics and transport*. 2014. № 1 (21). С. 73–82. URL: <https://scispace.com/pdf/modelling-of-curvature-of-the-railway-track-geometrical-5atanysi12.pdf>.
 10. Борисенко В. Д., Устенко С. А. Моделювання перехідної кривої на обмеженій ділянці місцевості. Наука та прогрес транспорту. *Вісник Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту*. 2017. № 2 (68). С. 92–100. URL: <http://mdu.edu.ua/wp-content/uploads/gmit14.pdf>.
 11. Баран П. І., Буряк К. О. Новий спосіб розміщення клоатоїди та її з'єднання з незміщеною коловою кривою. *Вісник геодезії та картографії*. 2013. № 3 (84). С. 11–14. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/vgtk_2013_3_4.

References

1. Ministry of Regional Development, Construction and Housing and Communal Services of Ukraine. (2015). *Avtomobilni dorohy*. Chastyna I. Proektuvannia. Chastyna II. Budivnytstvo (DBN V.2.3-4:2015). Available at: <https://e-construction.gov.ua/files-token/17e7804f196aeffa89ee-1a09e835cb33>
2. Ministry of Regional Development, Construction and Housing and Communal Services of Ukraine. (2019). *Metropoliteny*. Osnovni polozhennia (DBN V.2.3-7:2018). Available at: <https://e-construction.gov.ua/files-token/3a54024efcd93e7f047d37813db144ab>
3. Ministry for Communities and Territories Development of Ukraine. (2025). *Zaloznytsi kolii 1520 mm*. Normy proektuvannia (DBN V.2.3-19:2025). Available at: <https://e-construction.gov.ua/files-token/cb03f70d8d401342196675c8f436c74e>
4. State Committee of Construction, Architecture and Housing Policy of Ukraine. (2000). *Sporudy transportu*. Avtomobilni dorohy (DBN V.2.3-4-2000). Available at: <https://dbn.co.ua/load/normativy/dbn/1-1-0-210>
5. Ministry of Regional Development and Construction of Ukraine. (2011). *Sporudy transportu*. Metropoliteny (DBN V.2.3-7-2010). Available at: <https://dreamdim.ua/wp-content/uploads/2019/06/DBN-V23-7-2010-Metropolitan.pdf>

6. Borysenko, V. D., Ustenko, S. A., & Ustenko, I. V. (2018). Heometrychne modeliuвання kryvykh liniy i poverkhon u naturalnii parametryzatsii. MNU.. Available at: <https://rep.nuos.edu.ua/server/api/core/bitstreams/e24ed918-9f0e-46b2-8f18-10f8ee58df77/content>
7. Deakin, R. E. (2005). Horizontal curves. Circular curves, compound circular curves, reverse circular curves, transition curves and compound curves. Available at: <https://www.mygeodesy.id.au/documents/Horizontal%20Curves.pdf>
8. Sahithi, G., Prabhanjan, N., Yadav, G. S., Poongudi, K., Kiran, M. S., & Lanka, S. (2019). Comparison of transition curves in terms of lateral acceleration and lateral jerk. *International Journal of Recent Technology and Engineering (IJRTE)*, 8(1), 2714–2718. Available at: <https://www.ijrte.org/portfolio-item/a1337058119/>
9. Palikowska, C. M. (2014). Modeling of curvature of the railway track geometric layout using particle swarm optimization. *Logistics and Transport*, 1(21), 73–82. Available at: <https://scispace.com/pdf/modelling-of-curvature-of-the-railway-track-geometrical-5atanysi12.pdf>
10. Borysenko, V. D., & Ustenko, S. A. (2017). Modeliuвання perekhidnoi kryvoi na обмеzhenii diliansi mistsevosti. *Nauka ta prohres transportu. Visnyk Dnipropetrovskoho natsionalnoho universytetu zaliznychnoho transportu*, (2(68)), 92–100. Available at: <http://mdu.edu.ua/wp-content/uploads/gmit14.pdf>
11. Baran, P. I., & Buriak, K. O. (2013). Novyi sposib rozmishchennia klotoidy ta yii ziednannia z nezmishchenoiu kolovoi kryvoi. *Visnyk heodezii ta kartohrafiy*, (3(84)), 11–14. Available at: http://nbuv.gov.ua/UJRN/vgtk_2013_3_4

Marushchak M., Radov S., Rotte S., Volontyr A., Kuznetsova O.

CONNECTING THE ARCS OF TWO CIRCULAR CURVES IN THE DESIGN AND RECONSTRUCTION OF HIGHWAYS

LAND MANAGEMENT, CADASTRE AND LAND MONITORING 1'26: 110-120.

<http://dx.doi.org/10.31548/zemleustriy2026.01.07>

Abstract. *The safety and conditions of road transport traffic significantly depend on the influence of curved sections. For practical use, methods for designing horizontal curves are constantly being improved. At present, there are no simple and reliable methods for designing transition curves for connecting two one-way circular curves in scientific publications. Existing methods for finding optimal transition curves use iterative processes and specially developed software products. Therefore, improving the methodology for solving the problem of connecting circular curves is of practical importance. The paper considers the main options for forming curved sections with two circular curves - connecting by straight inserts, arcs of circles of larger radius and clothoids, as well as searching for a clothoid that is common to two circular curves and ensures the preservation of their centers. It is proved that with a known position of the centers and arcs of circular curves of given radii, the search for the optimal clothoid can be performed by the standard function "Solution Search" of the "Microsoft" menu. Excel ". Possible options for the location of the extreme points of the clothoid on existing or designed circular curves are given by the directional angles between the centers of the curves and the starting and ending points of the circular curves. Examples of calculations of direct inserts and clothoids for connecting two circular curves are given.*

Key words: *circular curve, geometric connection conditions, direct insertion, clothoid, optimization, solution search.*